

# BULLETIN DE LA S. M. F.

P. ADAM

## **Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 22 (1894), p. 110-115

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1894\\_\\_22\\_\\_110\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__110_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES SURFACES ADMETTANT POUR LIGNES DE COURBURE  
DEUX SÉRIES DE CERCLES GÉODÉSIIQUES ORTHOGONAUX;

Par M. PAUL ADAM.

Dans son Mémoire célèbre sur la déformation des surfaces (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII<sup>e</sup> Cahier) O. Bonnet a déterminé la surface la plus générale admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux. Sa méthode, qui repose sur l'emploi des formules de Codazzi, donne lieu à des calculs, sinon pénibles, du moins fort longs : la formation des équations de la surface prend dix-sept pages.

Or, si les formules de Codazzi facilitent, dans bien des cas, la résolution des problèmes, il en est d'autres où le contraire a lieu. Ici, par exemple, on peut déterminer les surfaces en question par une marche beaucoup plus simple que celle de Bonnet.

Si l'on écrit le  $ds^2$  d'une surface isothermique

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

la détermination d'une telle surface revient à la recherche de trois solutions  $x, y, z$  de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

liées entre elles par la condition

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Les surfaces qui admettent pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux, ayant pour  $ds^2$

$$ds^2 = \frac{1}{(U + V)^2} (du^2 + dv^2),$$

il suffit, pour les obtenir, de trouver trois solutions de l'équation suivante

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{V'}{U + V} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{U'}{U + V} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

et d'avoir égard à (1).

L'équation (2) s'intègre tout de suite et donne

$$(3) \quad 0 = \frac{U_1 + V_1}{U + V},$$

où les lettres ont une signification évidente.

Il faut donc prendre pour  $x, y, z$  trois expressions de la forme (3), en leur donnant, bien entendu, le même dénominateur  $U + V$ , puis déterminer les fonctions qui entrent en numérateur par la condition (1).

On peut évidemment, en prenant  $U$  et  $V$  pour nouvelles variables, écrire

$$x, y, z = \frac{U_1 + V_1, U_2 + V_2, U_3 + V_3}{u + v},$$

$x, y, z$  étant toujours astreintes à la relation (1), laquelle fournit

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u + v)^2(U_1' V_1' + U_2' V_2' + U_3' V_3') \\ -(u + v)[(U_1 + V_1)(U_1' + V_1') \\ \quad + (U_2 + V_2)(U_2' + V_2') + (U_3 + V_3)(U_3' + V_3')] \\ \quad + (U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation fonctionnelle paraît compliquée; mais, si l'on pose

$$(U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 = 2(u + v) \varphi(u, v),$$

elle se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0,$$

de sorte qu'elle revient à

$$(5) \quad (U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 + 2(u + v)(U_4 + V_4) = 0.$$

Cette équation, étant développée, a pour premier membre une somme de termes de la forme  $F(u)\Phi(v)$ . Or l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i B_i = 0,$$

dans laquelle les  $A$  dépendent d'une variable  $\alpha$  et les  $B$  d'une autre variable  $\beta$ , admet, outre les deux solutions évidentes qui

consistent à annuler soit tous les A, soit tous les B,  $n - 1$  autres solutions définies par les formules

$$A_j = \sum_{k=1}^{k=l} a_k^j A_k, \quad j = l+1, l+2, \dots, n,$$

$$-B_{j'} = \sum_{k=l+1}^{k=n} a_k^{j'} B_k, \quad j' = 1, 2, 3, \dots, l,$$

dans lesquelles les  $a$  sont des constantes arbitraires; et ces  $n - 1$  solutions s'obtiennent en donnant à  $l$  les valeurs 1, 2, 3, ...,  $n - 1$ .

Appliquons cela à l'équation (5) développée, en faisant jouer aux fonctions de  $u$  et de  $v$  ci-après le rôle des fonctions A et B écrites en regard :

1	A <sub>1</sub> ,	V <sub>1</sub> <sup>2</sup> + V <sub>2</sub> <sup>2</sup> + V <sub>3</sub> <sup>2</sup> + 2V <sub>4</sub> v	B <sub>1</sub> ,
u	A <sub>2</sub> ,	2V <sub>4</sub>	B <sub>2</sub> ,
U <sub>1</sub>	A <sub>3</sub> ,	2V <sub>1</sub>	B <sub>3</sub> ,
U <sub>2</sub>	A <sub>4</sub> ,	2V <sub>2</sub>	B <sub>4</sub> ,
U <sub>3</sub>	A <sub>5</sub> ,	2V <sub>3</sub>	B <sub>5</sub> ,
U <sub>4</sub>	A <sub>6</sub> ,	2v	B <sub>6</sub> ,
U <sub>1</sub> <sup>2</sup> + U <sub>2</sub> <sup>2</sup> + U <sub>3</sub> <sup>2</sup> + 2U <sub>4</sub> u	A <sub>7</sub> ,	1	B <sub>7</sub> .

En ayant égard à la symétrie de l'équation (5), on voit qu'il n'y a, pour cette équation, que deux solutions à essayer, celles qui correspondent à  $l = 2$  et à  $l = 3$ . En effet, si l'on change le classement qui vient d'être indiqué pour les fonctions de  $u$  et de  $v$  ci-dessus, en rangeant les fonctions de  $v$  dans l'ordre inverse de celui qu'avaient les fonctions analogues de  $u$ , les hypothèses  $l = 4$  et  $l = 5$  conduiront aux mêmes solutions de l'équation (5), sauf remplacement de  $u$  par  $v$  et de  $v$  par  $u$ , que les hypothèses  $l = 3$  et  $l = 2$ . On aboutira donc pour les coordonnées de la surface aux expressions données par  $l = 3$  et  $l = 2$ , où l'on changerait  $u$  en  $v$  et  $v$  en  $u$ .

1° *Hypothèse*  $l = 2$ . — Dans cette hypothèse, U<sub>1</sub>, U<sub>2</sub> et U<sub>3</sub> sont des fonctions linéaires de  $u$ ; il en résulte que, par un transport des axes parallèlement à eux-mêmes, les coordonnées de la

surface peuvent être ramenées à la forme

$$(6) \quad \frac{\varphi(v)}{u+v};$$

la surface serait alors un cône dont les génératrices auraient pour paramètre  $v$ ; tous les cônes répondent évidemment à la question; toutefois, en achevant le calcul, on reconnaît que des coordonnées de la forme (6) ne peuvent vérifier la relation (1); cela tient à ce que nous avons particularisé les fonctions  $U$  et  $V$ , et qu'il faudrait actuellement faire  $V = 0$  pour que les courbes ( $u$ ) pussent être, sur le cône, les trajectoires orthogonales des génératrices.

2° *Hypothèse*  $l = 3$ . — Il vient alors

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_2 = a_1^4 + a_2^4 u + a_3^4 U_1, \\ U_3 = a_1^5 + a_2^5 u + a_3^5 U_1, \\ U_4 = a_1^6 + a_2^6 u + a_3^6 U_1, \\ U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + 2U_4 u = a_1^7 + a_2^7 u + a_3^7 U_1, \\ -(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + 2V_4 v) = 2a_1^4 V_2 + 2a_1^5 V_3 + 2a_1^6 v + a_1^7, \\ -2V_4 = 2a_2^4 V_2 + 2a_2^5 V_3 + 2a_2^6 v + a_2^7, \\ -2V_1 = 2a_3^4 V_2 + 2a_3^5 V_3 + 2a_3^6 v + a_3^7. \end{array} \right.$$

Ces équations se simplifient beaucoup par les remarques suivantes.

D'abord  $U_2$  et  $U_3$  étant des fonctions linéaires de  $u$  et de  $U_1$ , les coordonnées  $y$  et  $z$  de la surface se ramènent, par un transport des axes parallèlement au plan des  $yz$ , à la forme

$$\frac{mU_1 + \varphi(v)}{u+v} \quad (m = \text{const.}).$$

On peut donc, sans restreindre la généralité du résultat, supposer  $U_2$  et  $U_3$  de la forme  $mU_1$ , c'est-à-dire faire

$$a_1^4 = a_2^4 = a_1^5 = a_2^5 = 0,$$

et l'on a alors

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{U_1 + V_2}{u+v}, \\ y = \frac{\alpha_3^4 U_1 + V_2}{u+v}, \\ z = \frac{\alpha_3^5 U_1 + V_3}{u+v}, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(y - a_3^4 x)(V_3 - a_3^3 V_1) - (z - a_3^5 x)(V_2 - a_3^4 V_1) = 0.$$

Les courbes  $(\nu)$  sont donc dans des plans passant par la droite fixe

$$y = a_3^4 x, \quad z = a_3^5 x.$$

Cette droite étant prise pour axe des  $x$ , il vient

$$a_3^4 = a_3^5 = 0.$$

Les équations (8) de la surface et la dernière des équations de condition (7) se réduisent ainsi à

$$(9) \quad \begin{cases} x = \frac{U_1 + V_1}{u + \nu}, \\ y = \frac{V_2}{u + \nu}, \\ z = \frac{V_3}{u + \nu}, \end{cases}$$

$$(10) \quad 2V_1 = -2a_3^6 \nu - a_3^7.$$

En transportant enfin les axes parallèlement à  $Ox$ , ce qui ne change pas ce dernier axe déjà particularisé, on donne à la coordonnée  $x$  la forme  $\frac{f(u)}{u + \nu}$ ; on peut, en conséquence, supposer la fonction  $V_1$  nulle, c'est-à-dire faire  $a_3^6 = a_3^7 = 0$ .

En définitive, les équations (9) de la surface et les équations de condition (7) sont maintenant

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{U_1}{u + \nu}, \\ y = \frac{V_2}{u + \nu}, \\ z = \frac{V_3}{u + \nu}, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} U_4 = a_1^6 + a_2^6 u, \\ U_1^2 + 2U_4 u = a_1^7 + a_2^7 u, \\ V_2^2 + V_3^2 + 2V_4 \nu = -2a_1^6 \nu - a_1^7, \\ 2V_4 = -2a_2^6 \nu - a_2^7. \end{cases}$$

En posant

$$\begin{aligned} V_2 &= V_6 \cos V_5, \\ V_3 &= V_6 \sin V_5, \end{aligned}$$

$V_5$  et  $V_6$  étant deux nouvelles fonctions de  $v$ , on tire des équations (12)

$$\begin{aligned} U_1^2 &= -2a_2^6 u^2 + u(a_2^7 - 2a_1^6) + a_1^7, \\ V_6^2 &= 2a_2^6 v^2 + v(a_2^7 - 2a_1^6) - a_1^7, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire tout simplement, en passant à une surface homothétique, et appelant  $a$  et  $b$  deux constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} U_1^2 &= -u^2 + 2au + b, \\ V_6^2 &= v^2 + 2av - b. \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à remplacer  $u$  par  $u + h$  et  $v$  par  $v - h$ , à prendre pour  $h$  l'une des racines de l'équation

$$h^2 - 2ah - b = 0$$

et à poser

$$2(a - h) = x,$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} U_1^2 &= xu - u^2, \\ V_6^2 &= xv + v^2, \end{aligned}$$

puis les équations de Bonnet

$$(13) \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{u(x-u)}}{u+v}, \\ y = \frac{\sqrt{v(x+v)}}{u+v} \cos V_5, \\ z = \frac{\sqrt{v(x+v)}}{u+v} \sin V_5, \end{cases}$$

qui comprennent, comme cas particulier, les équations des cyclides de Dupin.