SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 116-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__116_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JUILLET 1894.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Fleury : *Sur l'emploi des séries divergentes.*

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième degré.*

M. Raffy : *Remarques sur le problème général de la déformation des surfaces.*

SÉANCE DU 18 JUILLET 1894.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Touche : *Sur le mouvement d'un corps attiré par une droite ou deux droites rectangulaires suivant la loi de l'inverse d'une puissance positive de la distance.*

M. Kœnigs : *Sur les ds^2 dits harmoniques.*

M. Raffy présente quelques observations à ce sujet.

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième degré.*

M. Blutel : *Sur quelques surfaces qui possèdent des asymptotiques cubiques.*

M. Demoulin : *Sur des couples de surfaces applicables, dont les points correspondants sont à une distance constante.*

M. P. Painlevé adresse la Communication suivante :

Note sur une identité entre certains déterminants.

Dans un travail sur les équations de la Mécanique et du Calcul des variations, j'ai rencontré l'identité suivante (voir le *Journal de Mathématiques*, p. 45; 1894) :

Soient T *une fonction homogène quelconque d'ordre* α (1)

(1) α est une quantité quelconque réelle ou imaginaire.

des $(p+1)$ variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$, et τ la fonction obtenue en faisant $x=1$ dans T. *Soient, d'autre part,* Δ *le Hessien de* T, *et* δ *le déterminant* $|a_{ij}|$ *à p lignes et p colonnes dont le terme général* a_{ij} *est*

$$\alpha\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \, \partial x_j} - (\alpha - 1)\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\frac{\partial \tau}{\partial x_j}.$$

Si l'on fait $x=1$ *dans* Δ, *on a identiquement*

$$(1) \qquad (\alpha - 1)\,\delta \equiv \alpha^{p-1}\,\Delta\,\tau^{p-1}.$$

On peut dire encore que le Hessien

$$\Delta_1 \equiv \frac{\delta}{\alpha^{2p}\tau^{\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)p}}$$

de la fonction

$$[\mathrm{T}(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)]^{\frac{1}{\alpha}}$$

coïncide avec l'expression

$$\frac{\Delta}{\alpha^{p+1}(\alpha-1)}\,\frac{1}{\mathrm{T}^{p\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+1}}$$

(où l'on a fait $x=1$). En particulier, si $\alpha=2$, Δ est le discriminant de la forme quadratique T et ne dépend plus des x; on a alors

$$\delta \equiv 2^{p-1}\,\Delta\,\tau^{p-1}, \qquad \Delta_1 \equiv \frac{\Delta}{2^{p+1}}\,\frac{1}{\tau^{1+\frac{p}{2}}}.$$

Voici une démonstration directe bien simple de cette identité. Si l'on observe que, dans δ, deux lignes partielles

$$-(\alpha-1)\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}, \quad -(\alpha-1)\frac{\partial\tau}{\partial x_2}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}, \quad \ldots, \quad -(\alpha-1)\frac{\partial\tau}{\partial x_p}\frac{\partial\tau}{\partial x_i},$$
$$-(\alpha-1)\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\frac{\partial\tau}{\partial x_l}, \quad -(\alpha-1)\frac{\partial\tau}{\partial x_2}\frac{\partial\tau}{\partial x_l}, \quad \ldots, \quad -(\alpha-1)\frac{\partial\tau}{\partial x_p}\frac{\partial\tau}{\partial x_l},$$

sont identiques à un facteur près, on voit, en appelant d le Hessien de τ et d_i le déterminant obtenu en remplaçant dans d la $i^{\text{ième}}$ ligne par la ligne

$$\frac{\partial\tau}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\tau}{\partial x_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial\tau}{\partial x_p},$$

que le déterminant δ se met sous la forme

$$\delta \equiv \alpha^{p-1}\tau^{p-1}\left[\alpha\tau\, d-(\alpha-1)\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}d_1+\frac{\partial\tau}{\partial x_2}d_2+\ldots+\frac{\partial\tau}{\partial x_p}d_p\right)\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$\delta \equiv \alpha^{p-1}\tau^{p-1}\begin{vmatrix} \alpha\tau & \dfrac{\partial\tau}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tau}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial\tau}{\partial x_p} \\ (\alpha-1)\dfrac{\partial\tau}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_1\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_1\partial x_p} \\ (\alpha-1)\dfrac{\partial\tau}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_2\partial x_p} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (\alpha-1)\dfrac{\partial\tau}{\partial x_p} & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_1\partial x_p} & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_2\partial x_p} & \ldots & \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_p^2} \end{vmatrix}.$$

Mais, d'autre part, transformons Δ,

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x_p} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_p} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x_p} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_p} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_2\partial x_p} & \ldots & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_p^2} \end{vmatrix},$$

en tenant compte des identités d'Euler

$$x\frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}+x_1\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_1}+x_2\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_2}+\ldots+x_p\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_p}\equiv(\alpha-1)\frac{\partial T}{\partial x_j}$$
$$(x_j = x,\ x_1,\ \ldots,\ x_p).$$

Si l'on multiplie la première ligne de Δ par x, la seconde par x_1, la troisième par x_2, etc., et si l'on fait la somme, on trouve pour Δ l'expression

$$\Delta \equiv \frac{\alpha-1}{x}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} & \dfrac{\partial T}{\partial x_1} & \dfrac{\partial T}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial T}{\partial x_p} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_p} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial x_p} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_p} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_p^2} \end{vmatrix} \equiv \frac{(\alpha-1)}{x}\Delta'.$$

Transformons maintenant Δ' d'après l'identité d'Euler

$$x\frac{\partial T}{\partial x}+x_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+\ldots+x_p\frac{\partial T}{\partial x_p}\equiv\alpha T,$$

jointe aux précédentes; en multipliant la première colonne par x, la seconde par x_1, etc., et additionnant, on trouve

$$\Delta\equiv\frac{\alpha-1}{x^2}\begin{vmatrix}\alpha T & \frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial T}{\partial x_p}\\ (\alpha-1)\frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 dx_p}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ (\alpha-1)\frac{\partial T}{\partial x_p} & \frac{d^2 T}{\partial x_1\partial x_p} & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_p^2}\end{vmatrix};$$

d'où, en faisant $x=1$ dans Δ, l'identité annoncée

$$(\alpha-1)\delta\equiv a^{p-1}\Delta\tau^{p-1}.$$

On pourrait généraliser cette identité en introduisant les dérivées de T d'ordre supérieur au second.