L. RAFFY

Sur le problème général de la déformation des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 119-132

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__119_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA DÉFORMATION DES SURFACES;

Par M. L. Raffy.

1. Voici une proposition qui, malgré son étroite connexion avec une propriété bien connue des lignes asymptotiques, ne semble pas avoir été énoncée dans toute sa généralité :

Si les coordonnées de toutes les surfaces (Σ) *qui admettent un même élément linéaire sont définies par des équations telles que*

$$dx_i = A_i\, d\alpha + B_i\, d\beta, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

où les A_i *et les* B_i *sont des fonctions déterminées de deux variables* α *et* β, *de deux fonctions arbitraires* $\varphi(\alpha)$ *et* $\psi(\beta)$ *d'un* *seul argument chacune, ainsi que de leurs dérivées successives en nombre limité, les lignes* $\alpha =$ const. *et* $\beta =$ const. *sont les asymptotiques de toute surface* (Σ).

En effet, considérons en particulier une surface (Σ_0) qui répond à un choix déterminé des fonctions arbitraires

$$\varphi(\alpha) = \varphi_0(\alpha), \qquad \psi(\beta) = \psi_0(\beta).$$

Si, dans les formules générales (1), nous donnons à β une valeur fixe β_0, d'ailleurs quelconque, nous obtenons une courbe (C_0) de la surface (Σ_0). Cette courbe est définie par les trois équations

$$dx_i = A_i[\alpha, \beta_0; \varphi_0(\alpha), \ldots; \psi_0(\beta_0), \psi'_0(\beta_0), \ldots, \psi_0^{(n)}(\beta_0)]\, d\alpha.$$

Cela posé, désignons par $\psi_1(\beta)$ l'une quelconque des fonctions de β qui satisfont aux $n+1$ équations

$$\psi_1(\beta_0) = \psi_0(\beta_0), \qquad \psi'_1(\beta_0) = \psi'_0(\beta_0), \qquad \ldots, \qquad \psi_1^{(n)}(\beta_0) = \psi_0^{(n)}(\beta_0).$$

La surface (Σ_1), obtenue en faisant dans les formules (1)

$$\varphi(\alpha) = \varphi_0(\alpha), \qquad \psi(\beta) = \psi_1(\beta),$$

est applicable sur la surface (Σ_0), puisqu'on suppose applicables les unes sur les autres toutes les surfaces définies par ces formules, quelles que soient les expressions attribuées aux fonctions φ et ψ. Mais, à raison des conditions imposées à la fonction $\psi_1(\beta)$, la surface (Σ_1) passe par la courbe (C_0) de la surface (Σ_0), comme on le voit en donnant à β la valeur fixe β_0. Dès lors, la surface (Σ_0) pouvant être déformée sans que la courbe (C_0) le soit, cette courbe est, en vertu d'un théorème connu ([1]), une asymptotique de la surface (Σ_0). On prouverait de même que les lignes $\alpha =$ const. sont aussi des asymptotiques ([2]).

([1]) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 280.

([2]) Le raisonnement qui précède a plus de généralité que la proposition énoncée. Il prouve notamment la suivante : *Si les formules*

$$dx_i = A_i\, d\alpha + B_i\, d\beta \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les A_i *et* B_i *sont des fonctions déterminées de deux variables* α *et* β, *d'une fonction arbitraire* $\psi(\beta)$, *ainsi que de ses dérivées successives en nombre limité, définissent des surfaces toutes applicables les unes sur les autres, les lignes* $\beta =$ const. *sont des asymptotiques pour chacune de ces surfaces.*

2. Comme exemples de ce théorème, je citerai les diverses surfaces (à courbure totale différente de zéro) dont on connaît toutes les déformations, successivement découvertes par M. Weingarten ou déduites de ses travaux par M. Goursat [1]. Dans tous ces cas, en effet, les coordonnées des surfaces cherchées (Σ) sont déterminées par des formules pareilles à celles qui figurent dans l'énoncé ci-dessus; et M. Goursat, en étudiant la transformation imaginée par M. Weingarten, a implicitement établi que les variables α et β sont les paramètres des lignes asymptotiques des surfaces (Σ).

On voit que, quand un problème de déformation comporte une solution complète du type défini par l'énoncé de notre théorème, c'est à leurs asymptotiques qu'il faut rapporter les surfaces cherchées pour que les différentielles de leurs coordonnées prennent la forme dont il s'agit. Ceci suggère, pour traiter les questions d'applicabilité, deux procédés généraux, inverses l'un de l'autre, que nous emploierons successivement pour retrouver les beaux résultats qui viennent d'être rappelés.

3. *Premier procédé.* — Partons des formules par lesquelles M. Lelieuvre [2] a exprimé les différentielles des coordonnées d'une surface au moyen des paramètres α et β de ses asymptotiques :

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = (\mathrm{MN}'_\alpha - \mathrm{NM}'_\alpha)\,d\alpha - (\mathrm{MN}'_\beta - \mathrm{NM}'_\beta)\,d\beta, \\ dy = (\mathrm{NL}'_\alpha - \mathrm{LN}'_\alpha)\,d\alpha - (\mathrm{NL}'_\beta - \mathrm{LN}'_\beta)\,d\beta, \\ dz = (\mathrm{LM}'_\alpha - \mathrm{ML}'_\alpha)\,d\alpha - (\mathrm{LM}'_\beta - \mathrm{ML}'_\beta)\,d\beta. \end{cases}$$

Les fonctions L, M, N sont trois solutions quelconques (linéairement indépendantes) d'une même équation

$$(3)\qquad \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \rho(\alpha, \beta).$$

Si l'on représente par

$$(4)\qquad ds^2 = \mathrm{E}_1\,d\alpha^2 + 2\mathrm{F}_1\,d\alpha\,d\beta + \mathrm{G}_1\,d\beta^2$$

---

[1] *Sur un théorème de M. Weingarten et sur la théorie des surfaces applicables* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. V, 1892).

[2] *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XII_2, p. 126.

l'élément linéaire des surfaces (2), on trouve aisément

$$(5)\quad \begin{cases} E_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'^2_\alpha + M'^2_\alpha + N'^2_\alpha) - (LL'_\alpha + MM'_\alpha + NN'_\alpha)^2, \\ -F_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'_\alpha L'_\beta + M'_\alpha M'_\beta + N'_\alpha N'_\beta) \\ \qquad - (LL'_\alpha + MM'_\alpha + NN'_\alpha)(LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta), \\ G_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'^2_\beta + M'^2_\beta + N'^2_\beta) - (LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta)^2. \end{cases}$$

Nous allons former trois fonctions L, M, N vérifiant une équation (3), telles en outre que les relations (2) rentrent dans le type qui nous occupe et définissent des surfaces toutes applicables les unes sur les autres. A cet effet, nous poserons

$$(6)\quad \begin{cases} 2L = i\sqrt{i}\left[(\alpha^2 - 1)\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + (\beta^2 - 1)\dfrac{\partial v}{\partial \beta}\right], \\ 2M = \sqrt{i}\left[(\alpha^2 + 1)\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + (\beta^2 + 1)\dfrac{\partial v}{\partial \beta}\right], \\ 2N = i\sqrt{i}\left(2\alpha\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + 2\beta\dfrac{\partial v}{\partial \beta}\right), \end{cases}$$

en désignant par v la solution la plus générale de l'équation

$$(7)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{\psi'(v)}{(\alpha - \beta)^2},$$

où $\psi'(v)$ est la dérivée d'une fonction provisoirement indéterminée de v. Moyennant l'hypothèse faite sur v, on vérifie sans difficulté les relations

$$\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{1}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{\psi''(v)}{(\alpha - \beta)^2}.$$

Je dis maintenant que, la fonction ψ une fois choisie, d'une manière quelconque d'ailleurs, toutes les surfaces correspondantes ont même élément linéaire. En effet, les formules (6) donnent immédiatement

$$(8)\quad L^2 + M^2 + N^2 = 2i\varpi,$$

en introduisant la fonction auxiliaire

$$(9)\quad \varpi = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}.$$

Dès lors, on a sans calcul

$$(10)\quad \begin{cases} LL'_\alpha + MM'_\alpha + NN'_\alpha = i\dfrac{\partial\varpi}{\partial\alpha}, \\ LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta = i\dfrac{\partial\varpi}{\partial\beta}. \end{cases}$$

Différentiant les formules (6) en ayant égard à l'équation (7), on trouve après réductions

$$(11)\quad \begin{cases} L'^2_\alpha + M'^2_\alpha + N'^2_\alpha = i\left[(\alpha-\beta)^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 2(\alpha-\beta)\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \left(\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^2\right], \\ L'^2_\beta + M'^2_\beta + N'^2_\beta = i\left[(\alpha-\beta)^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + 2(\beta-\alpha)\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \left(\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)^2\right], \\ L'_\alpha L'_\beta + M'_\alpha M'_\beta + N'_\alpha N'_\beta = i\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{2}\left[\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2\right] \\ \qquad\qquad - i\left[(\alpha-\beta)\left(\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} - \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}\right) - \dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right]. \end{cases}$$

Au moyen des relations (8), (9), (10) et (11) on peut calculer les seconds membres des identités (5). Il convient, pour faire disparaître des résultats les trois dérivées secondes de v, de les exprimer en fonction de $\psi'(v)$ et des deux dérivées premières de ϖ, ce que permettent les équations (7) et (9). On trouve ainsi

$$E_1 = \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2 + 2\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)^2,$$

$$F_1 = \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\beta} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) + 2\varpi\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta},$$

$$G_1 = \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\beta} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2 + 2\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)^2.$$

Il suffit alors de faire $\varpi - \psi = u$ pour arriver à l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \psi(v)]\,dv^2,$$

dont la forme montre que toutes les surfaces correspondant à une même fonction $\psi(v)$ sont applicables les unes sur les autres.

Enfin, il est bien évident que les différentielles (2) rentreront dans le type (1) défini par notre théorème, si l'intégrale générale v de l'équation (7) admet la forme analytique des fonctions A_i et B_i. C'est ce qui aura lieu, d'après une théorie générale due à M. Moutard, si l'on prend

$$\psi(v) = \frac{m(1-m)}{2} v^2, \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

et aussi, en vertu d'une remarque faite par M. Weingarten, dans le cas où

$$\psi(v) = nv + pe^{\frac{2v}{n}},$$

quelles que soient les deux constantes arbitraires n et p. (On voit que, quand ψ est proportionnel à v^2, les trois fonctions L, M et N sont des solutions de l'équation qui définit v).

4. *Second procédé.* — M. Darboux a montré ([1]) que les coordonnées curvilignes u, v des points d'une surface d'élément linéaire

$$(4)' \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

sont définies comme fonctions des paramètres α et β des lignes asymptotiques par les deux équations suivantes :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &2\mathrm{H}^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left(2\mathrm{H}^2\frac{\partial\log k}{\partial u} + \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} - 2\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} + \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} \\ &\qquad + \left(\mathrm{H}^2\frac{\partial\log k}{\partial v} + \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) \\ &\qquad\qquad + \left(2\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0, \\ &2\mathrm{H}^2\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left(2\mathrm{H}^2\frac{\partial\log k}{\partial v} + \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} - 2\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} + \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} \\ &\qquad + \left(\mathrm{H}^2\frac{\partial\log k}{\partial u} + \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) \\ &\qquad\qquad + \left(2\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2, \qquad k = \sqrt{\frac{-1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}},$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux.

Quand on a trouvé une solution (u, v) de ce système, on a vir-

---

([1]) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 290.

tuellement déterminé une surface (à la position et à une symétrie près) qui admet l'élément linéaire considéré. Mais, pour connaître les différentielles de ses coordonnées, il faut encore intégrer deux équations de Riccati.

Examinons l'élément linéaire pour lequel on a

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 2[u + \psi(v)]$$

et, par suite,

$$H^2 = G, \qquad k = \frac{i}{G}.$$

Les équations générales (12) deviennent alors

$$(13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\psi'(v)}{2(u+\psi)}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) - \frac{1}{u+\psi}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0,$$

$$(14) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\psi'(v)}{2(u+\psi)}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0.$$

Tel est le système que nous allons intégrer. Pour éliminer u, nous poserons

$$(15) \quad \varpi = u + \psi(v).$$

L'équation (14) s'écrit alors

$$(14)' \quad \varpi = \frac{\psi'}{2}\frac{v'_\alpha v'_\beta}{v''_{\alpha\beta}},$$

et la précédente devient

$$(13)' \quad \varpi\frac{\partial^2 \log\varpi}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta} - v'_\alpha v'_\beta + \frac{\psi'}{2}\left(v'_\alpha\frac{\partial\log\varpi}{\partial\beta} + v'_\beta\frac{\partial\log\varpi}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Si maintenant on élimine ϖ entre ces deux équations, on trouve, tous calculs faits,

$$(16) \quad \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)} = -2\frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)}.$$

De cette équation, intégrée par Liouville, on tire

$$(17) \quad \frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)} = \frac{A'B'}{(A-B)^2},$$

en désignant par A et B deux fonctions arbitraires, l'une de α, l'autre de β. Ce résultat, rapproché des relations (14) et (15), donne

$$\varpi = u + \psi(v) = \frac{1}{2}\frac{(A - B)^2}{A'B'}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}. \tag{18}$$

Toutes les solutions du système (13) et (14) appartiennent donc au système (17) et (18). Pour établir la réciproque, remarquons que, si l'on pose

$$\mu = \frac{A'B'}{(A - B)^2},$$

d'où résultent, pour les équations (17) et (18), les formes suivantes

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \mu\psi'(v), \tag{17$'$}$$

$$u = \frac{v'_\alpha v'_\beta}{2\mu} - \psi(v), \tag{18$'$}$$

l'équation (14) est vérifiée d'elle-même. Quant à l'équation (13), il suffit d'y substituer les dérivées u'_α, u'_β, $u''_{\alpha\beta}$ tirées de l'équation (18)$'$, en ayant égard à la relation (17)$'$, pour voir que son premier membre contient en facteur l'expression

$$\frac{\partial^2 \log \mu}{\partial \alpha\, \partial \beta} + 2\mu,$$

qui est nulle, d'après la définition de μ.

Ainsi, nous avons fait dépendre de l'équation (17), ou de l'équation (7) qui n'a pas moins de généralité, le problème qui consiste à rapporter l'élément linéaire proposé

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \psi(v)]\, dv^2$$

aux paramètres des lignes asymptotiques des surfaces qui l'admettent. C'est ce qui se fera par l'intermédiaire de la formule

$$u + \psi(v) = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} v'_\alpha v'_\beta,$$

v étant l'intégrale générale de l'équation (7). On retrouve ainsi l'élément linéaire (4), défini par les relations (5), (6) et (7). Les surfaces correspondantes sont déterminées par les formules (2), ce qui nous dispense de former et d'intégrer les deux équations de Riccati dont il a été question plus haut.

5. Il n'est peut-être pas sans intérêt de rapprocher les deux procédés que nous venons d'appliquer et de présenter quelques remarques sur leur mode d'emploi.

Revenons aux formules (2). Désignons par a et b deux fonctions arbitraires, l'une de α, l'autre de β, par a_n et b_n leurs dérivées respectives d'ordre n et supposons que L, M, N soient des fonctions connues des arguments

$$\alpha,\ \beta;\quad a,\ b;\quad a_1,\ b_1;\quad a_2,\ b_2;\quad \ldots;\quad a_n,\ b_n$$

et de ceux-là seulement. Par hypothèse, tous les éléments linéaires

$$ds^2 = E_1\, d\alpha^2 + 2F_1\, d\alpha\, d\beta + G_1\, d\beta^2, \tag{4}$$

qui diffèrent les uns des autres par le choix des fonctions a et b, peuvent être ramenés à la même forme

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2, \tag{4$'$}$$

où E, F, G sont des fonctions *déterminées* des deux variables indépendantes u et v. Laissant de côté le cas des surfaces à courbure totale constante, nous allons exprimer u et v en α et β.

Égalant les courbures totales des deux éléments linéaires (4)′ et (4), nous aurons une première équation finie

$$\sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}} = k(u, v) = \frac{1}{L^2 + M^2 + N^2}. \tag{19}$$

On en obtiendra une seconde en égalant l'un des paramètres différentiels de $k(u, v)$ au paramètre correspondant de $(L^2+M^2+N^2)^{-1}$. Cette seconde équation

$$\chi(u, v) = \chi_1(\alpha, \beta), \tag{20}$$

jointe à la précédente, déterminera les fonctions u et v, dont le calcul n'exigera aucune intégration.

Cette conclusion ne tombe en défaut que quand *tous* les paramètres différentiels de k sont des fonctions de k, c'est-à-dire dans le cas des surfaces de révolution. Mais alors l'élément linéaire (4) pouvant s'écrire

$$ds^2 = du^2 + U^2\, dv^2,$$

la formule connue

$$k = \sqrt{\frac{U''}{U}}$$

donnera u en fonction de k, et, par suite, de α et β. Pour déterminer v, il suffit de recourir à l'identité

$$\frac{\sqrt{ds^2 - du^2}}{U} = dv.$$

Ayant exprimé le premier membre en α et β, on sera ramené à l'intégration d'une différentielle exacte. Si l'on a égard à la relation (19), on voit que u dépend des mêmes arguments (sans plus) que L, M, N, et que les dérivées partielles v'_α, v'_β dépendent en outre des dérivées a_{n+1} et b_{n+1}.

6. Dans le cas général, il semble que le second membre de l'équation (20) contienne, d'après sa loi de formation, des dérivées a_r, b_r d'ordre supérieur à n, et que, par suite, l'une au moins des fonctions u et v dépende de ces dérivées d'ordre r. Nous allons montrer qu'il n'en est rien : *les seuls arguments dont puissent dépendre u et v sont ceux qui concourent à former* L, M *et* N.

En effet, d'après nos hypothèses, les coefficients E_1, F_1, G_1 de l'élément linéaire (4) ne contiennent les dérivées de a et b que jusqu'à l'ordre $n+1$ inclusivement. Si donc r est supérieur à n, ils doivent être, en particulier, indépendants de a_{r+1} et de b_{r+1}. Supposons maintenant que l'on ait

$$u = u(a_r, b_r, \ldots), \qquad v = v(a_r, b_r, \ldots).$$

Nous tirons de là

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} a_{r+1} + U_1\right) d\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial b_r} b_{r+1} + U_2\right) d\beta,$$
$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial a_r} a_{r+1} + V_1\right) d\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial b_r} b_{r+1} + V_2\right) d\beta,$$

les fonctions U_1, U_2, V_1, V_2 ne dépendant ni de a_{r+1}, ni de b_{r+1}. Substituons ces différentielles dans l'élément linéaire $(4)'$ et exprimons qu'il est indépendant de a_{r+1} et de b_{r+1}, en nous souvenant que E, F et G n'en dépendent pas. Le coefficient E_1 est un trinome du second degré en a_{r+1} ; d'où les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} & E\left(\frac{\partial u}{\partial a_r}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial a_r}\frac{\partial v}{\partial a_r} + G\left(\frac{\partial v}{\partial a_r}\right)^2 = 0, \\ & EU_1\frac{\partial u}{\partial a_r} + F\left(V_1\frac{\partial u}{\partial a_r} + U_1\frac{\partial v}{\partial a_r}\right) + GV_1\frac{\partial v}{\partial a_r} \quad = 0. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient F_1 est bilinéaire en a_{r+1} et b_{r+1}; d'où les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} & E\frac{\partial u}{\partial a_r}\frac{\partial u}{\partial b_r}+F\left(\frac{\partial u}{\partial a_r}\frac{\partial v}{\partial b_r}+\frac{\partial u}{\partial b_r}\frac{\partial v}{\partial a_r}\right)+G\frac{\partial v}{\partial a_r}\frac{\partial v}{\partial b_r}=0,\\ & EU_2\frac{\partial u}{\partial a_r}+F\left(V_2\frac{\partial u}{\partial a_r}+U_2\frac{\partial v}{\partial a_r}\right)+GV_2\frac{\partial v}{\partial a_r}=0,\\ & EU_1\frac{\partial u}{\partial b_r}+F\left(V_1\frac{\partial u}{\partial b_r}+U_1\frac{\partial v}{\partial b_r}\right)+GV_1\frac{\partial v}{\partial b_r}=0.\end{aligned}\right.$$

Le coefficient G_1 est un trinôme du second degré en b_{r+1}; d'où les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} & E\left(\frac{\partial u}{\partial b_r}\right)^2+2F\frac{\partial u}{\partial b_r}\frac{\partial v}{\partial b_r}+G\left(\frac{\partial v}{\partial b_r}\right)^2=0,\\ & EU_2\frac{\partial u}{\partial b_r}+F\left(V_2\frac{\partial u}{\partial b_r}+U_2\frac{\partial v}{\partial b_r}\right)+GV_2\frac{\partial v}{\partial b_r}=0.\end{aligned}\right.$$

Des sept équations ci-dessus, détachons la première de chaque groupe. Nous obtenons trois relations linéaires et homogènes en E, F, G, dont le déterminant est

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a_r}\frac{\partial v}{\partial b_r}-\frac{\partial u}{\partial b_r}\frac{\partial v}{\partial a_r}\right)^3.$$

Ce déterminant doit être nul.

Soit d'abord $\frac{\partial u}{\partial a_r}\frac{\partial u}{\partial b_r}\neq 0$. On aura

$$\frac{\partial v}{\partial a_r}=\lambda\frac{\partial u}{\partial a_r},\qquad \frac{\partial v}{\partial b_r}=\lambda\frac{\partial u}{\partial b_r}.$$

Les trois équations considérées se réduisent à une, savoir

$$E+2F\lambda+G\lambda^2=0.$$

Les quatre équations restantes se réduisent à deux

$$U_1(E+\lambda F)+V_1(F+\lambda G)=0,$$
$$U_2(E+\lambda F)+V_2(F+\lambda G)=0,$$

qui, rapprochées de la précédente, ainsi écrite,

$$(E+\lambda F)+\lambda(F+\lambda G)=0,$$

entraînent

$$V_1=\lambda U_1,\qquad V_2=\lambda U_2,$$

et, par suite,

$$dv=\lambda\,du.$$

Ainsi v serait fonction de u, ce qui ne se peut.

Soit maintenant $\frac{\partial u}{\partial b_r} = 0$, avec $\frac{\partial u}{\partial a_r} \neq 0$, ce qui exige $\frac{\partial v}{\partial b_r} = 0$.

Les trois équations considérées se réduisent à une

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial a_r}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial a_r}\frac{\partial v}{\partial a_r} + G\left(\frac{\partial v}{\partial a_r}\right)^2 = 0.$$

Les quatre équations restantes se réduisent à deux

$$U_1\left(E\frac{\partial u}{\partial a_r} + F\frac{\partial v}{\partial a_r}\right) + V_1\left(F\frac{\partial u}{\partial a_r} + G\frac{\partial v}{\partial a_r}\right) = 0,$$

$$U_2\left(E\frac{\partial u}{\partial a_r} + F\frac{\partial v}{\partial a_r}\right) + V_2\left(F\frac{\partial u}{\partial a_r} + G\frac{\partial v}{\partial a_r}\right) = 0.$$

Rapprochons de chacune d'elles la précédente, ainsi écrite,

$$\frac{\partial u}{\partial a_r}\left(E\frac{\partial u}{\partial a_r} + F\frac{\partial v}{\partial a_r}\right) + \frac{\partial v}{\partial a_r}\left(F\frac{\partial u}{\partial a_r} + G\frac{\partial v}{\partial a_r}\right) = 0;$$

nous trouvons immédiatement

$$U_1\frac{\partial v}{\partial a_r} - V_1\frac{\partial u}{\partial a_r} = 0, \qquad U_2\frac{\partial v}{\partial a_r} - V_2\frac{\partial u}{\partial a_r} = 0.$$

On en conclut

$$U_1 = \mu_1\frac{\partial u}{\partial a_r}, \qquad U_2 = \mu_2\frac{\partial u}{\partial a_r},$$

$$V_1 = \mu_1\frac{\partial v}{\partial a_r}, \qquad V_2 = \mu_2\frac{\partial v}{\partial a_r}.$$

De là résulte

$$du = \frac{\partial u}{\partial a_r}[(a_{r+1} + \mu_1)d\alpha + \mu_2 d\beta],$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial a_r}[(a_{r+1} + \mu_1)d\alpha + \mu_2 d\beta].$$

Ainsi v serait fonction de u ou se réduirait à une constante, conclusions également inacceptables.

Supposons enfin $\frac{\partial u}{\partial a_r} = \frac{\partial u}{\partial b_r} = 0$, c'est-à-dire u indépendant de a_r et de b_r. Les trois équations considérées se réduisent à deux

$$G\frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \qquad G\frac{\partial v}{\partial b_r} = 0.$$

On voit que, si G n'est pas nul, v devra, comme u, être indépendant de a_r et de b_r.

Si $G = 0$, les quatre équations restantes deviennent

$$U_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \qquad U_1 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0, \qquad U_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \qquad U_2 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0,$$

abstraction faite du facteur F, que l'on ne peut supposer nul sans réduire l'élément linéaire à un carré parfait. Or U_1 et U_2 ne peuvent pas être nuls tous les deux, car alors u serait constant. On a donc

$$\frac{\partial v}{\partial a_r} = \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0,$$

ce qui montre que v est indépendant de a_r et de b_r.

7. D'après la proposition que nous venons d'établir, si les dérivées de l'ordre le plus élevé de a et de b qui figurent dans L, M et N sont celles de l'ordre n, les fonctions u et v ne contiendront pas de dérivée d'ordre plus élevé. Mais il peut arriver que l'une d'elles ne dépende ni de a_n, ni de b_n, ou que chacune d'elles ne dépende que de l'une de ces deux dérivées.

Pour étudier ces cas particuliers, revenons aux équations (12), que nous écrirons ainsi :

$$(12)' \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} + P \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \dfrac{\partial u}{\partial \beta} + Q \left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + R \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} + P_1 \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \dfrac{\partial u}{\partial \beta} + Q_1 \left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + R_1 \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

ce qui définit suffisamment la signification des lettres P, Q, R, P_1, Q_1 et R_1. Je dis que *si les dérivées de u ou de v manquent dans l'une de ces équations, l'élément linéaire* (4)′ *convient à des surfaces réglées.*

Supposons, par exemple, les coefficients P_1 et Q_1 nuls, ce qui entraîne les deux équations

$$(P_1) \qquad 2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial u} = 0,$$

$$(Q_1) \qquad H^2 \frac{\partial \log k}{\partial u} + E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

La première peut s'écrire

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{E}}.$$

On en déduit

$$\sqrt{\mathrm{E}} = \frac{\partial t}{\partial u}, \qquad \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{E}}} = \frac{\partial t}{\partial v},$$

en introduisant une fonction auxiliaire t de u et de v. Alors l'élément linéaire proposé

$$(4)' \qquad ds^2 = \left(\sqrt{\mathrm{E}}\,du + \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv\right)^2 + \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{E}}\,dv^2$$

prend la forme

$$ds^2 = dt^2 + \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{E}}\,dv^2.$$

Or, en éliminant la dérivée E'_v entre les équations (P_1) et (Q_1), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{k\mathrm{H}^2}{\mathrm{E}} = 0, \qquad \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{V}(v)}{k},$$

ce qui permet d'écrire

$$ds^2 = dt^2 + \frac{dv_1^2}{k},$$

résultat strictement équivalent à la forme canonique

$$ds^2 = dt^2 + (lt^2 + mt + n)\,dv_1^2$$

de l'élément linéaire des surfaces réglées. En effet, pour le type

$$ds^2 = dt^2 + \mathrm{C}^2\,dv_1^2,$$

le paramètre k est déterminé par la relation connue

$$k^2 = \frac{\mathrm{C}''_{t^2}}{\mathrm{C}}.$$

Dans l'exemple actuel, k^2 est égal à C^{-4}. On a donc

$$\mathrm{C}\mathrm{C}''_{t^2} = \frac{1}{\mathrm{C}^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\mathrm{C}^2}{\partial t^2} = \mathrm{C}\mathrm{C}''_{t^2} + \mathrm{C}'^2_t = \mathrm{C}'^2_t + \frac{1}{\mathrm{C}^2}.$$

Différentions par rapport à t; nous trouvons

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^3\mathrm{C}^2}{\partial t^3} = 2\,\mathrm{C}'_t\left(\mathrm{C}''_{t^2} - \frac{1}{\mathrm{C}^3}\right) = 0.$$

Ainsi C^2 est bien un trinôme du second degré en t, ce qui démontre la proposition. *(A suivre.)*