Bulletin de la S. M. F.

P. Appell

Sur le théorème des aires

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 190-195
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__190_0>

SUR LE THÉORÈME DES AIRES;

Par M. P. Appell.

I. Imaginons un système sollicité par des forces extérieures telles que la somme de leurs moments par rapport à un axe fixe Oz soit nulle. Alors, si le système part du repos, la somme $\Sigma m r^2 \frac{d\theta}{dt}$ reste nulle. Mais, malgré cette condition, si le système n'est pas rigide, il peut, par des déformations successives et sans subir de torsions, partir d'une configuration déterminée et revenir à une configuration identique, déduite de la première par une rotation autour de Oz. Je me propose d'abord d'en indiquer un exemple élémentaire au point de vue de l'enseignement, en renvoyant, pour des considérations générales, à des Notes de MM. Guyou et Maurice Lévy (*Comptes rendus,* 29 octobre 1894).

Soient une roue homogène, de centre O, mobile sans frottement sur un plan horizontal, $A_0A'_0$ un diamètre invariablement lié à la roue. Aux points A_0, A'_0 sont placés sur la roue deux ouvriers de même masse m et aux points C_0, C'_0 situés sur le même diamètre, à égale distance de part et d'autre du centre O, sont placés deux autres ouvriers de masse μ. Le système est immobile. Cela posé, les ouvriers font la manœuvre suivante, composée de quatre phases :

1° Les ouvriers m se mettent à marcher sur la circonférence, dans le même sens de rotation, autour du centre en restant diamétralement opposés; ils s'arrêtent après avoir parcouru un quart de la circonférence de la roue : celle-ci tourne alors en sens contraire d'un angle α, puis s'arrête.

2° Les ouvriers μ se réunissent au centre : la roue ne bouge pas; mais le moment d'inertie par rapport à Oz diminue.

3° Les ouvriers m reviennent alors à leurs positions primitives sur la roue : celle-ci tourne en sens contraire de sa rotation précédente d'un angle *différent* β, puis s'arrête.

4° Les ouvriers μ se séparent et viennent occuper leurs positions primitives sur la roue, opération qui laisse la roue immobile.

Après ces mouvements, le système a repris la même configuration, mais a tourné d'un certain angle $\beta - \alpha$. En les recommençant, les ouvriers arriveront donc à faire tourner le système d'un angle supérieur à tout angle donné.

Si l'on appelle a le rayon de la roue, Mk^2 son moment d'inertie, c la distance de C_0 au centre, on a dans la première phase

$$2ma^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - (Mk^2 + 2\mu c^2)\alpha = 0$$

et dans la troisième, puisque c est alors nul,

$$2ma^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - Mk^2\beta = 0.$$

On voit donc que β est supérieur à α et l'on peut calculer $\beta - \alpha$.

II. Voici maintenant une remarque générale permettant de ramener à un même type tous les problèmes du genre de celui qui précède. J'ai indiqué sommairement cette remarque dans une Note des *Comptes rendus* (5 novembre 1894).

Soient un corps solide, mobile autour d'un axe fixe Oz, et des points de masses m_1, m_2, ... liés en quelque manière au corps solide et animés par rapport à ce corps de mouvements prescrits à l'avance; si donc on appelle r_1, θ_1, z_1; r_2, θ_2, z_2; ... les coordonnées semi-polaires des points m_1, m_2, ..., par rapport à des axes Ox, Oy, Oz liés au corps solide, ces coordonnées sont des fonctions du temps données à l'avance. Supposons enfin que la somme N des moments des forces extérieures appliquées au système, par rapport à l'axe de rotation Oz, dépende uniquement de la position du corps solide et non des positions des points m_1, m_2, ... sur le corps.

Soit φ l'angle dont le corps a tourné, à partir d'une certaine position initiale, par exemple l'angle de Ox avec un axe fixe OX perpendiculaire à Oz, I son moment d'inertie par rapport à Oz : la somme des moments des quantités de mouvement des points du corps solide par rapport à Oz est $I\frac{d\varphi}{dt}$. D'autre part, les coordonnées semi-polaires absolues des points m_1, m_2, ..., par rapport aux axes fixes Oz, OX et à un axe perpendiculaire OY, sont r_1, $\theta_1 + \varphi$, z_1; r_2, $\theta_2 + \varphi$, z_2; ...; donc la somme des moments de leurs quantités de mouvement absolues, par rapport à Oz, est

$$m_1 r_1^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right) + m_2 r_2^2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right) + \ldots$$

ou

$$\sum m r^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \sum m r^2.$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué au système total donne donc

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left[\sum m r^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\left(\sum m r^2 + \mathrm{I}\right)\right] = \mathrm{N},$$

équation qui donne φ en fonction de t, puisque N est supposé fonction de φ seul et que les r et les θ sont des fonctions données de t.

Cela posé, considérons un point ayant pour masse $\mathrm{M} = \sum m$ et pour coordonnées semi-polaires R, Θ et Z, par rapport aux axes $Oxyz$ liés au corps solide, les quantités définies par les équations

$$(2) \qquad \mathrm{M R}^2 = \sum m r^2, \qquad \mathrm{M R}^2\, d\Theta = \sum m r^2\, d\theta, \qquad \mathrm{MZ} = \sum m z.$$

Comme $r_1, r_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots$, sont des fonctions connues de t, R, Θ et Z seront aussi des fonctions connues de t, et le point M ainsi défini sera animé d'un mouvement connu dans le corps. Si l'on remplace tous les points $m_1, m_2, \ldots$ par ce seul point M, en admettant que cette substitution n'altère pas la somme N des moments des forces par rapport à Oz, le mouvement du corps n'est pas changé. En effet, l'équation du nouveau mouvement est

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\left[\mathrm{M R}^2 \frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}(\mathrm{R}^2 + \mathrm{I})\right] = \mathrm{N},$$

identique à l'équation (1), en vertu des relations (2). On voit que la valeur Z ne joue ici aucun rôle; aussi pourrait-on la prendre arbitrairement en fonction de t, au lieu de la définir par la troisième des équations (2).

III. Voici quelques propriétés du point M ainsi défini. Imaginons un système d'axes $Oxyz$ et des points $m_1, m_2, \ldots$ de coordonnées semi-polaires r_1, θ_1, z_1 ; r_2, θ_2, z_2 ; ..., animés de mouvements connus; appelons *centre d'inertie* de ces points par rapport à l'axe Oz le point mobile de masse M dont les coordonnées semi-polaires R, Θ, Z sont définies en fonction de t par les équations

$$(4)\quad \begin{cases} M = \sum m, & MR^2 = \sum m r^2, \\ MR^2\, d\Theta = \sum m r^2\, d\theta, & MZ = \sum m z; \end{cases}$$

l'angle polaire de ce point n'est déterminé qu'à une constante près; nous supposerons, pour fixer les idées, que tous les θ s'annulent pour $t = 0$ et qu'il en soit de même de Θ. Nous voyons alors que ce point possède des propriétés analogues à celles du centre de gravité. Ainsi, la position du centre d'inertie de tous les points, au temps t, n'est pas changée, si l'on remplace d'abord quelques-uns des points par leur centre d'inertie.

On peut alors énoncer le résultat précédent en disant que :

Si, dans le problème général du n° II, l'on remplace plusieurs points m_1, m_2, ... par leur centre d'inertie par rapport à Oz, ce point étant calculé dans le mouvement relatif par rapport au solide, le mouvement du reste du système n'est pas altéré, pourvu que cette substitution n'altère pas N.

Par exemple, si l'axe Oz est vertical et si les seules forces extérieures sont des poids, $N = 0$, avant et après la substitution.

IV. Appliquons d'abord ces considérations à l'exemple I. Remplaçons les deux points m et μ, primitivement placés en A_0 et C_0, par leur centre d'inertie M. En appelant r et θ les coordonnées polaires de m par rapport à la plaque, l'axe polaire étant OA_0, et r_1, θ_1 celles de μ, on a, pour le centre d'inertie M,

$$M = m + \mu, \qquad MR^2 = mr^2 + \mu r_1^2, \qquad MR^2\, d\Theta = mr^2\, d\theta + \mu r_1^2\, d\theta_1.$$

Voyons quel est le mouvement de ce point sur la roue. Dans la première phase, $r = 0$, $r_1 = c$, $\theta_1 = 0$, θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Donc M décrit un arc de cercle de centre O, de rayon $\sqrt{\dfrac{ma^2 + \mu c^2}{m + \mu}}$, et d'angle au centre $\lambda = \frac{ma^2}{ma^2 + \mu c^2} \frac{\pi}{2}$. Dans la deuxième phase, $r = a$, r_1 varie de c à o, θ est égal à λ et θ_1 à o. Donc Θ reste constant et égal à λ, R diminue jusqu'à $\sqrt{\frac{m a^2}{m+\mu}}$; le centre d'inertie M décrit une portion de rayon. Dans la troisième phase, R reste constant, r est égal à a, r_1 à o, $d\theta_1$ est nul, θ diminue de $\frac{\pi}{2}$ à o; donc Θ diminue de λ à o. Enfin, dans la quatrième phase, Θ est nul, R augmente de $\sqrt{\frac{m a^2}{m+\mu}}$ à $\sqrt{\frac{m a^2 + \mu c^2}{m+\mu}}$.

En définitive, le point M décrit une courbe fermée composée de deux portions de rayons de la roue et de deux arcs de cercle concentriques à la roue.

On peut de même remplacer les deux ouvriers symétriques m et μ placés primitivement en A'_0 et C'_0 par un point M′ de même masse que M symétrique de M par rapport au centre. Le mouvement de la roue est le même sous l'action de ces deux points M et M′ que sous l'action des quatre points primitifs.

Si la roue était assujettie à tourner autour d'un axe vertical fixe réalisé matériellement, il n'y aurait plus à se préoccuper de la symétrie des points qui a pour but de maintenir le centre de gravité fixe; on pourrait alors remplacer les quatre points par leur centre d'inertie, c'est-à-dire par un seul point décrivant une courbe fermée sur la roue. On vérifiera facilement que cette courbe est homothétique, par rapport au centre O, de celle que décrit le point M.

V. Imaginons un observateur tombant verticalement dans le vide et supposons qu'il veuille tourner autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité. Il pourra faire jouer à ses bras étendus symétriquement le rôle des ouvriers m dans la roue I et à ses jambes, plus ou moins écartées, celui des ouvriers μ.

Dans ces conditions, le mouvement du tronc regardé comme rigide sera le même que si le mouvement de chaque bras et de chaque jambe était remplacé par celui de son centre d'inertie par rapport à l'axe vertical mené par le centre de gravité. L'identité est donc complète entre cette question et le problème élémentaire résolu dans le n° I.

On pourrait même remplacer le mouvement du bras et de la jambe droits par celui de leur centre d'inertie, et le mouvement des membres symétriques par celui de leur centre d'inertie symétrique du premier. On aurait ainsi un système analogue au système IV et à celui que MM. Marcel Deprez et Picard ont construit. (Voyez *Comptes rendus,* 5 novembre 1894.)