BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur la rotation d'un système déformable

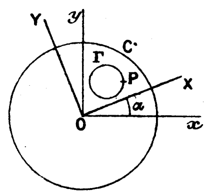
Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 195-197
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__195_1>

SUR LA ROTATION D'UN SYSTÈME DÉFORMABLE;

Par M. ÉMILE PICARD.

A la suite des expériences de M. Marey sur la chute d'un chat, la question de la rotation d'un système déformable s'est trouvée mise à l'étude. Il était intéressant de donner un exemple *d'un système, partant du repos, pouvant, par le seul travail des forces intérieures, tourner d'un angle quelconque autour de son centre de gravité, tous ses points se retrouvant à la fin de la rotation dans les positions relatives qu'ils occupaient primitivement*. Parmi les exemples très nombreux que l'on peut citer, il n'y en a point, ce me semble, de plus simple que celui que je communiquai à M. Marcel Deprez et d'où il déduisit un petit appareil qu'il fit fonctionner récemment devant l'Académie ([1]).

Fig. 1.



Considérons un disque matériel C, mobile autour d'un axe vertical O. Sur le disque C on a tracé une courbe fermée Γ. Un point matériel P est placé en un point de Γ et tout le système est pri-

([1]) MARCEL DEPREZ, *Sur un appareil servant à mettre en évidence certaines conséquences du théorème des aires* (*Comptes rendus*, 5 novembre 1894). *Voir* aussi, dans le numéro précédent des *Comptes rendus*, deux Communications de M. GUYOU et de M. MAURICE LÉVY. On trouvera aussi un article de M. APPELL dans le numéro du 5 novembre.

mitivement en repos. Supposons maintenant que le point P se meuve sur Γ suivant une loi arbitrairement donnée, de façon à revenir à sa position initiale après avoir décrit la courbe Γ tout entière; à ce moment, le disque C aura tourné d'un certain angle, et les différentes parties du système formé par le disque et le point matériel auront repris leurs mêmes positions relatives. Nous avons donc là un exemple du phénomène cherché.

Proposons-nous de trouver l'expression de l'angle dont a tourné le système. Nous représenterons par OX et OY deux axes rectangulaires invariablement liés au disque C et à la courbe Γ, et nous désignerons par Ox et Oy deux axes fixes dans le plan horizontal. Les deux coordonnées X et Y du point P seront des fonctions données du temps correspondant au déplacement de P sur Γ. Si α désigne l'angle xOX, nous aurons, en appliquant le théorème des aires et tenant compte de ce qu'au début le système est au repos,

$$MK^2 \frac{d\alpha}{dt} + m\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

où MK^2 désigne le moment d'inertie du disque par rapport à O; m représente la masse de P, et l'on a

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient de suite

$$[MK^2 + m(X^2 + Y^2)]\frac{d\alpha}{dt} + m\left(X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}\right) = 0,$$

ou encore

$$d\alpha = -m\frac{X\,dY - Y\,dX}{MK^2 + m(X^2 + Y^2)}$$

et, par suite, on aura pour l'angle total Ω dont a tourné le disque

$$\Omega = -m\int_\Gamma \frac{X\,dY - Y\,dX}{MK^2 + m(X^2 + Y^2)},$$

l'intégrale qui figure dans le second membre étant une intégrale curviligne prise le long de la courbe Γ.

Un cas particulièrement simple sera celui où Γ se composerait d'un arc de cercle AB de centre O et des deux rayons OA et OB. Si R désigne le rayon de l'arc AB et ω l'ouverture de son angle au centre, on aura, d'après la formule précédente et en supposant AB parcouru dans le sens de OX vers OY,

$$\Omega = -\frac{m\,R^2}{M\,K^2 + m\,R^2}\,\omega.$$

Afin d'éviter d'avoir un axe vertical rigide qui pratiquement aurait toujours quelque frottement dans ses supports, M. Marcel Deprez associe à la courbe Γ une seconde courbe Γ' symétrique de la première par rapport au point O et sur laquelle se meut un point P′ symétrique de P. Le centre de gravité de tout le système est alors toujours au point O et il suffit d'employer, comme axe de rotation, un fil sans torsion.

On peut donner, théoriquement au moins, une autre forme à l'expérience précédente. Imaginons un homme debout sur un plan parfaitement poli et ayant les pieds en O; il étend les bras et fait décrire à ses mains deux courbes Γ et Γ' dans un plan horizontal, de la même façon que P et P′ décrivaient précédemment leurs courbes respectives. Notre individu pourra, de cette manière, prendre un mouvement continu de rotation.