BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Abaque en points isoplèthes de l'équation de Képler

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 197-204
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__197_1>

ABAQUE EN POINTS ISOPLÈTHES DE L'ÉQUATION DE KÉPLER;

Par M. M. d'Ocagne.

1. Si l'on met l'équation de Képler

$$u - e \sin u = nt \tag{1}$$

sous la forme

$$\frac{1}{n} u - \frac{1}{n} e \sin u = t,$$

elle rentre dans le type général envisagé dans les §§ 2 et 3 de ma Note sur l'*Abaque général de la Trigonométrie sphérique* (¹).

Appliquant les formules (3), (4) et (5) données à l'endroit cité,

(¹) *Bulletin astronomique*, p. 5; 1894.

on voit donc que l'équation est représentable par un abaque ainsi constitué :

1° Le système de points simplement isoplèthes (t) défini par

(2) $$x = t, \qquad y = 0;$$

2° Le système de points simplement isoplèthes (e) défini par

(3) $$x = e, \qquad y = 1;$$

3° Le système de points doublement isoplèthes (u, n) défini par

(4) $$x = \frac{u}{n + \sin u}, \qquad y = \frac{\sin u}{n + \sin u}.$$

Pour avoir les isoplèthes (u) et (n), formant par leur ensemble ce dernier système, éliminons d'abord n entre ces deux dernières équations, ce qui donne

(5) $$y = \frac{\sin u}{u} x.$$

Les isoplèthes (u) sont donc des droites passant par l'origine.

Pour éliminer maintenant u, écrivons ces deux équations

$$nx + x \sin u = u, \qquad ny + (y - 1)\sin u = 0,$$

et ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement par $(1 - y)$ et x, ce qui donne

$$nx = u(1 - y).$$

Portant la valeur de u tirée de là dans la seconde des équations précédentes, on obtient pour les isoplèthes (n) l'équation

(6) $$ny + (y - 1) \sin \frac{nx}{1 - y} = 0.$$

Les équations (2), (3), (5) et (6) définissent complètement l'abaque demandé.

J'ai tenu à signaler cette solution, *théoriquement* la plus satisfaisante, pour montrer un nouvel exemple d'application du principe qui m'a servi à construire l'abaque général de la Trigonométrie sphérique. Mais il vaut mieux, *en pratique,* éviter le tracé des courbes (n) définies par l'équation (6), en adoptant la solution suivante.

2. Posant $nt = \theta$, considérons l'équation sous la forme

$$u - e \sin u = \theta.$$

Écrivons-la

$$\theta + e \sin u - u = 0$$

et prenons θ et e pour des coordonnées parallèles de droite, U et V.

Nous aurons alors pour premiers systèmes d'isoplèthes (θ) et (e) les points

$$\text{(7)} \qquad U = \theta \quad \text{et} \quad V = e,$$

constituant des graduations naturelles respectivement sur l'axe des U et sur l'axe des V.

Le troisième système d'isoplèthes (u) sera dès lors donné par l'équation

$$U + V \sin u - u = 0,$$

qui représente, pour chaque valeur de u, un point dont les coordonnées, rapportées à un axe des x confondu avec l'axe des origines et à un axe des y équidistant de ceux des U et des V, sont, en représentant par $2a$ l'écartement de ces deux derniers (¹),

$$\text{(8)} \qquad x = -a\,\frac{1 - \sin u}{1 + \sin u}, \qquad y = \frac{u}{1 + \sin u}.$$

Les formules (7) et (8) définissent complètement notre nouvel abaque.

3. Ici se place une première remarque importante au point de vue de la construction de l'abaque.

La variable u croît de 0 à 2π. Or, lorsqu'elle croît de 0 à π, x reste compris entre $-a$ et 0; mais, lorsqu'elle croît de π à 2π, x devient infini pour $u = \frac{3\pi}{2}$. Les points isoplèthes (u) s'étendraient donc jusqu'à l'infini, ce qui est *pratiquement* inacceptable. Afin d'éviter cet inconvénient majeur, j'aurai recours à l'artifice que j'ai déjà employé dans mon livre pour l'abaque de la distance sphérique (²).

Pour les valeurs de u supérieures à π, posons

$$\text{(9)} \qquad U = \theta, \qquad V = -e.$$

(¹) *Nomographie,* p. 53.

(²) *Nomographie.* Note au bas de la page 84.

Il vient alors pour les points isoplèthes (u) l'équation

$$\mathrm{U} - \mathrm{V} \sin u - u = 0,$$

qui donne, en coordonnées cartésiennes,

$$(10) \qquad x = -a \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}, \qquad y = \frac{u}{1 - \sin u}.$$

Cette nouvelle valeur de x reste finie lorsque u varie de π à 2π. De cette façon, tous les points isoplèthes (u) sont à distance finie. Seulement à la variable e correspondent deux graduations : l'une, portée dans le sens positif, sert lorsque $u < \pi$, c'est-à-dire $\theta < \pi$; l'autre, portée dans le sens négatif, lorsque $u > \pi$ ou $\theta > \pi$.

4. Voici maintenant, à propos de la construction de l'abaque, une autre remarque non moins importante au point de vue *pratique*.

Tandis que la variable θ varie de 0 à $2\pi = 6,283, \ldots$, la variable e reste comprise entre $0,01$ et $0,4$. Cela conduirait à avoir sur l'axe des U une échelle seize fois plus développée environ que celle qui serait portée par l'axe des V.

Pour obvier à cet inconvénient, posons $e = \frac{e'}{10}$ et construisons l'abaque de l'équation

$$u - e' \frac{\sin u}{10} = \theta,$$

défini, d'après ce qui précède, par les formules

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{U} = \theta, & \mathrm{V} = e' \\ x = -a \dfrac{10 - \sin u}{10 + \sin u}, & y = \dfrac{10 u}{10 + \sin u} \end{array} \right\} \text{pour } u < \pi,$$

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{U} = \theta, & \mathrm{V} = -e' \\ x = -a \dfrac{10 + \sin u}{10 - \sin u}, & y = \dfrac{10 u}{10 - \sin u} \end{array} \right\} \text{pour } u > \pi;$$

puis, cet abaque une fois construit, graduons l'échelle des points (e') au moyen des valeurs correspondantes de e.

On peut remarquer qu'ici la transformation employée précédemment pour éviter les points à l'infini et qui a donné naissance aux formules du second groupe n'est plus nécessaire, puisque le dénominateur des valeurs de x et de y dans le premier groupe ne peut plus s'annuler.

Il vaut mieux néanmoins continuer à en faire usage pour la raison que voici : la valeur de l'inconnue u est donnée par le point où la droite qui joint le point coté θ au point coté e coupe la courbe graduée au moyen des valeurs de u. Au point de vue de la précision, il est préférable que ce point de rencontre se trouve *entre* les points servant à déterminer la droite indicatrice de la lecture. Or, la transformation susmentionnée a précisément pour effet de faire rentrer tous les points (u) entre l'axe des U et l'axe des V.

5. Pour obtenir l'abaque en points simplement isoplèthes qui vient d'être décrit, nous avons dû prendre le produit nt pour un argument que nous avons appelé θ; mais rien n'est plus facile que d'éviter de faire ce produit en complétant l'abaque de la façon suivante. Formons l'abaque du produit

$$\theta = nt$$

en posant

$$U = \theta, \qquad V = -n,$$

ce qui donne pour isoplèthes (t)

$$U + tV = 0,$$

ou

$$x = a\frac{t-1}{t+1}, \qquad y = 0.$$

Comme n reste compris entre 0,0025 et 0,006, tandis que t varie de 0 à 2500, nous coterons encore ici, *pour la construction de l'abaque,* les variables $t' = \frac{t}{1000}$ et $n' = 1000n$ aux variables t et n, et nous coterons les points (t') et (n') respectivement au moyen des valeurs de t et de n, ces dernières étant même, pour plus de commodité, exprimées en secondes.

L'abaque complémentaire ainsi construit peut, sans nul inconvénient, être superposé au premier, les échelles (θ) de l'un et de l'autre, qui sont semblables, étant mises en coïncidence.

C'est de cette façon qu'a été obtenu l'abaque représenté par la *fig.* 1. Son mode d'emploi peut se résumer ainsi :

Une droite (trait sur un transparent ou fil tendu) passant par le point coté n sur l'échelle verticale de droite est amenée *à passer par le point coté t sur l'échelle horizontale. On la fait*

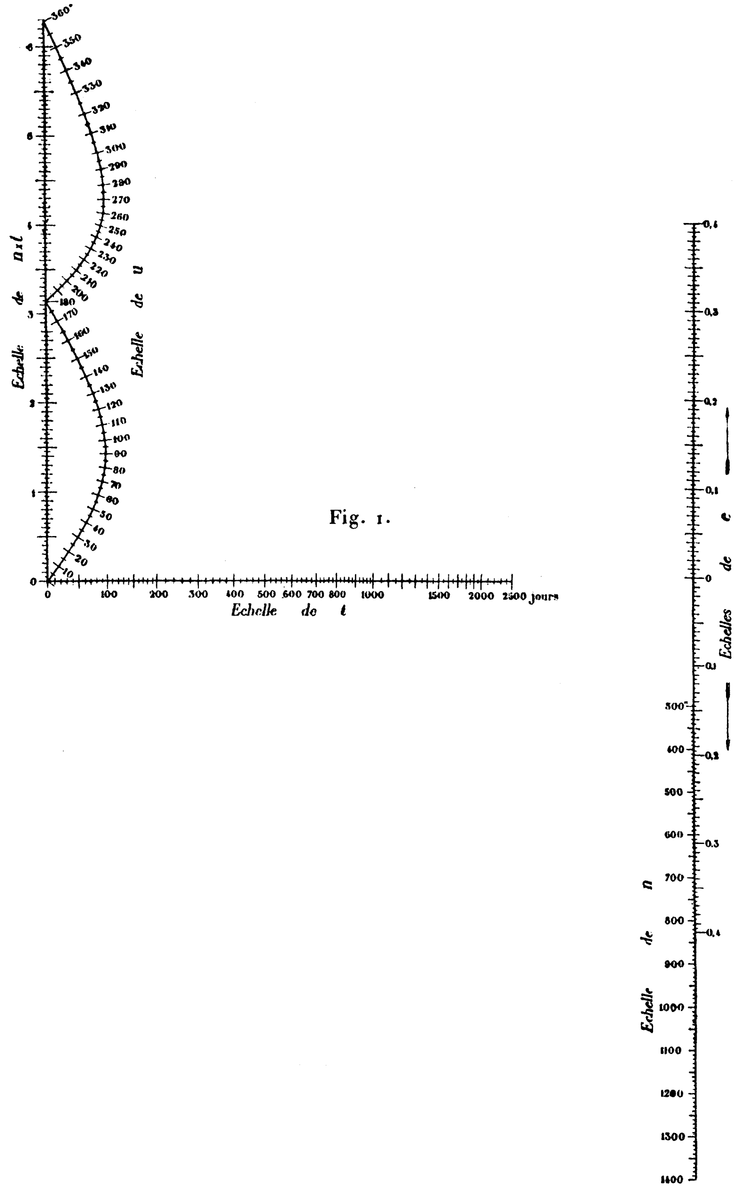

Fig. 1.

ensuite pivoter autour du point θ où elle coupe l'échelle verti-

cale de gauche, jusqu'à ce qu'elle passe par le point coté e sur l'échelle verticale de droite, dans sa partie supérieure si le point θ est sous l'arc inférieur de la courbe, dans sa partie inférieure si le point θ est sous l'arc supérieur. On n'a plus qu'à lire la cote du point où cette courbe est alors coupée par la droite.

6. Si l'on ne tient pas à effectuer le produit $\theta = nt$ sur l'abaque même, c'est-à-dire si l'on conserve θ comme entrée, on peut réduire notablement encore le Tableau de la manière suivante :

Considérons la seconde partie de l'abaque, celle qui correspond aux valeurs de u supérieures à π. Elle comprend l'échelle inférieure de droite pour la variable e, la moitié supérieure de l'échelle de gauche pour la variable θ, la courbe supérieure pour la variable u.

Supposons menée la droite qui joint le point coté o de l'échelle de droite au point coté π de l'échelle de gauche, et prenons la figure symétrique oblique de l'ensemble qui vient d'être définie par rapport à cette droite, la symétrie ayant lieu parallèlement aux axes des U et des V.

Dans ces conditions, l'échelle inférieure de e vient coïncider exactement avec l'échelle supérieure de la même variable ; la partie supérieure (de π à 2π) de l'échelle de θ se rabat sur la partie inférieure (de o à π), le point de cote θ_0 venant en coïncidence avec celui de cote $2\pi - \theta_0$. Je dis qu'il en est de même pour l'échelle curviligne correspondant à u.

Soient, en effet, les valeurs $u_0 < \pi$ et $2\pi - u_0 > \pi$. Les formules (11) donnent pour le point (u_0) les coordonnées

$$x_0 = -a\,\frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0}, \qquad y_0 = \frac{10\,u_0}{10 + \sin u_0},$$

et les formules (12), pour le point $(2\pi - u_0)$,

$$x_1 = -a\,\frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0}, \qquad y_1 = \frac{10(2\pi - u_0)}{10 + \sin u_0}.$$

Ces deux points, ayant même abscisse, sont sur une parallèle aux axes des U et des V. D'autre part, le point milieu de leur intervalle a pour ordonnée

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{10\pi}{10 + \sin u_0}.$$

Son abscisse étant

$$x = -a\,\frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0},$$

on voit, par l'élimination de $\sin u_0$, qu'il se trouve sur la droite

$$\pi x + 2ay = a\pi,$$

qui est celle joignant le point $e = 0 (x = a,\ y = 0)$ au point $\theta = \pi (x = -a,\ y = \pi)$.

La transformation indiquée a donc bien pour effet d'amener le point de cote $2\pi - u_0$ en coïncidence avec le point de cote u_0.

L'abaque se trouve ainsi réduit à la *fig.* 2.

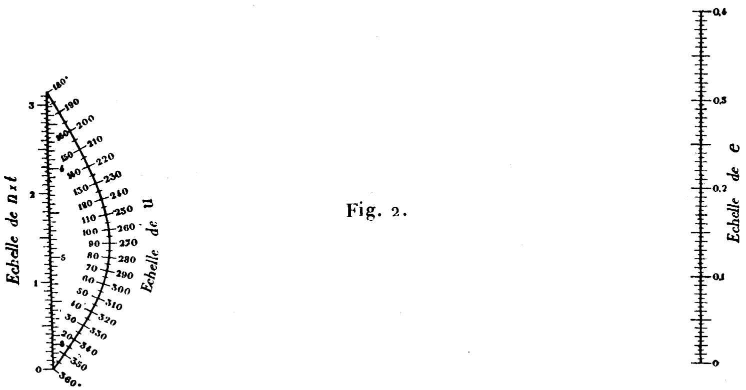

Fig. 2.

Son emploi consiste simplement en ceci :

Joindre par une droite le point coté e sur l'échelle de droite au point coté θ *sur l'échelle de gauche. Suivant que* θ *est plus petit ou plus grand que* π, *lire, au point où cette droite coupe l'échelle curviligne, la valeur de u plus petite ou plus grande que* π.

Il est bien évident que pour obtenir, avec un tel abaque, le degré de précision requis par les besoins de l'Astronomie, il serait nécessaire de lui donner des dimensions qui rendraient son emploi peu pratique. Il permettra en tout cas d'obtenir rapidement une valeur approchée de l'inconnue, et supprimera ainsi tout tâtonnement dans l'application des méthodes connues d'approximation.