BULLETIN DE LA S. M. F.

E. VESSIOT

Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 208-216
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__208_1>

SUR UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION ET SUR LA RÉDUCTION DES SINGULARITÉS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE;

Par M. E. Vessiot.

1. Il est naturel de chercher à généraliser la méthode de transformation des figures par projection, en prenant comme projetantes les droites d'une congruence quelconque. Si l'on veut de plus que par un point arbitraire ne passe qu'une seule projetante, cette congruence devra être du premier ordre; et l'on obtiendra la plus simple ([1]) de ces méthodes de projection, en employant une con-

---

([1]) Il en existe évidemment une infinité; on peut prendre, par exemple, pour projetantes les droites qui s'appuient sur une conique et une droite qui la rencontre, ou sur une cubique gauche et une de ses cordes.

gruence linéaire. C'est de cette méthode que nous voulons dire ici quelques mots; nous lui donnerons, pour abréger, le nom de *projection* ou *perspective quadratique*. Elle correspond en effet, comme nous allons le montrer, à la transformation quadratique birationnelle des figures planes, de même que la projection conique, ou perspective linéaire, qui en est visiblement un cas singulier, correspond à la transformation homographique, ou linéaire, des figures planes.

Soit d'abord une congruence linéaire générale, c'est-à-dire ayant deux directrices rectilignes A et B, ne se rencontrant pas; et soient deux plans quelconques de l'espace, P et P′. Les droites de la congruence établissent une correspondance birationnelle (¹) entre les points de ces deux plans; je dis que cette correspondance est quadratique. Soit, en effet, D une droite du plan P, par exemple. Les projetantes des divers points de cette droite, dans notre perspective quadratique, engendrent la surface du second degré, qui contient A, B et D. La perspective de D est la section de cette quadrique par le plan P′; c'est donc une conique : la transformation est donc bien du second degré. Les *points principaux* sont, dans le plan P′ par exemple, les points α', β', où A et B percent ce plan, et le point γ' où l'intersection Δ des deux plans est rencontrée par la droite qui joint les pieds α et β de A et de B dans le plan P. Ce sont de même dans le plan P les points α, β, et le point γ où la droite $\alpha'\beta'$ rencontre Δ. Enfin les points de Δ sont à eux-mêmes leurs homologues.

Dans le cas où l'une des directrices de la congruence, A par exemple, rencontre Δ, les quatre points α, γ, α', γ' sont réunis en un seul ω. Alors les coniques C′ qui correspondent, par exemple, aux droites D du plan P, passent en β', en ω, et ont même tangente en ω; car le plan (βA) est tangent en ω à toutes les quadriques lieux des projetantes des points des droites D, et sa trace ωT′ sur le plan P′ est, par suite, tangente à toutes les coniques C′.

Si A et B rencontrent toutes deux Δ, on voit sans peine que la transformation s'abaisse au premier degré.

Supposons maintenant que la congruence ait deux directrices

(¹) Ce cas a été étudié, sous le nom de *projection gauche*, par Steiner et plus tard par Transon.

rectilignes confondues en une seule A. Les quadriques précédentes se raccordent alors le long de A. Soient encore α et α' les points où A perce respectivement P et P', et γ, γ' les points où Δ est rencontrée par les plans tangents communs aux points α' et α respectivement. Les coniques C', homologues des droites D, passent en α', γ et ont $\alpha'\gamma$ pour tangente commune au point α'.

Si A rencontre Δ, α, α', γ, γ' se confondent en un seul point ω, et deux des coniques C', n'ayant qu'un point commun en dehors de ω, y ont un contact du second ordre; la tangente commune est encore l'intersection de P' et du plan Π tangent en ω à toutes les quadriques précédemment considérées.

Enfin, si ce plan Π passe par Δ, la transformation s'abaisse encore au premier degré.

2. Nous venons de retrouver les trois types, bien connus, de la transformation birationnelle du second degré. Il nous reste à faire voir, ce qui est presque évident, que nous les avons avec toute la généralité possible. D'une manière plus précise, nous allons prouver que :

Toute transformation birationnelle du second degré s'obtient par une perspective quadratique associée à une perspective linéaire.

Supposons d'abord une transformation birationnelle de deux plans P et P', avec trois points principaux distincts, α, β, γ pour le premier, α', β', γ' pour le second. A une droite Δ de P, passant par γ, correspond dans P' une droite Δ' passant par γ', et la correspondance des points des deux plans définit sur Δ et Δ' deux divisions homographiques. On peut toujours supposer que, par une perspective linéaire appliquée à l'un des plans, on a fait en sorte que ces deux divisions soient superposables. Plaçons donc le plan P' de manière que Δ' vienne sur Δ et que les deux divisions coïncident effectivement point par point. Soient alors m et m' deux points quelconques homologues de P et P'. Les droites homologues αm et $\alpha' m'$ se coupent sur Δ (confondue avec Δ'), et par suite la droite mm' de l'espace rencontre la droite $\alpha\alpha'$; de même elle rencontre $\beta\beta'$. On a donc bien affaire à une perspective quadratique.

Soit, en second lieu, une transformation quadratique birationnelle du second type. Aux droites D du plan P correspondent, dans le plan P', des coniques C' ayant deux points fixes α', β', et ayant en α' une même tangente $\alpha'T'$. De même, aux droites D' de P' correspondent dans P des coniques C ayant deux points fixes α, β et ayant en α une même tangente αT. A une droite Δ passant par α correspond une droite Δ' passant par α', et l'on a, sur ces deux droites, deux divisions homographiques où α et α' sont homologues. Comme dans le cas précédent, on peut supposer que Δ' coïncide avec Δ, de manière que ces deux divisions coïncident : α et α' en particulier sont confondus en un même point ω de Δ (confondue avec Δ'). Soient alors m et m' deux points homologues quelconques. Les deux droites βm, $\beta' m'$ sont aussi homologues et se coupent par suite sur Δ en un point λ ; donc mm' rencontre $\beta\beta'$. De plus, si l'on désigne par b et b' les points d'intersection respectifs de βm et αT (c'est-à-dire ωT), et de $\beta' m'$ et $\alpha' T'$ (c'est-à-dire $\omega T'$), β est l'homologue de b' et β' celui de b. Les deux divisions homographiques déterminées sur βm et $\beta' m'$ par la correspondance des deux plans ayant un point commun, le point λ, les droites mm', $\beta b'$, et $\beta' b$ passent par un même point, c'est-à-dire que mm' rencontre l'intersection des deux plans ($\beta\omega T'$), et ($\beta'\omega T$). On a donc bien encore une perspective quadratique.

On peut aussi supposer que l'on a amené β et β' sur l'intersection Δ des deux plans, et que les points de cette droite sont à eux-mêmes leurs homologues. Alors deux rayons homologues αm, $\alpha' m'$ se coupent en λ sur Δ, et si m décrit $\alpha\lambda$, m' se déplace sur $\alpha'\lambda$ de façon que mm' va toujours couper $\alpha\alpha'$ au même point λ_1. A tout point λ correspond ainsi un point λ_1 et un seul. D'autre part, si p et p' sont deux points homologues non situés dans le plan ($\alpha\lambda\alpha'$), la droite pp' ne passe pas par λ_1 ; sans quoi les droites pm et $p'm'$ se couperaient sur Δ, et, ayant trois points homologues deux à deux, seraient homologues l'une de l'autre ; ce qui est impossible, pm par exemple ne passant ni en α ni en β. Donc à un point λ_1 ne correspond aussi qu'un point λ, et il y a correspondance homographique entre les points λ et λ_1, ou, si l'on veut, entre les plans ($\alpha\lambda\alpha'$) et les points λ_1 par où passent toutes les droites mm' contenues dans l'un de ces plans. C'est dire que la transformation considérée est une perspective quadratique ayant pour directrice rectiligne double la droite $\alpha\alpha'$.

Reste le cas où les trois points principaux de la transformation sont confondus. Aux droites de P correspondent dans P′ des coniques ayant un contact du second ordre en un point α'; aux droites de P′ des coniques, situées dans P, et ayant en un point α un contact du second ordre. On peut encore supposer que α et α' coïncident en ω, et que les points de l'intersection Δ des deux plans sont à eux-mêmes leurs homologues. Soient alors m et m' deux points homologues quelconques; les droites ωm, $\omega m'$ sont homologues, et font partie de deux faisceaux homographiques plans, qui ont Δ pour rayon commun. Donc tous les plans $(m\omega m')$ passent par une même droite A. De plus, toutes les droites mm' situées dans un même plan passant par A vont couper cette droite en un même point λ_1, et l'on verra, comme dans le cas précédent, qu'il y a correspondance homographique entre les plans passant par A et les points λ_1. La proposition annoncée est dès lors entièrement démontrée.

3. Nous avons, dans ce qui précède, employé la transformation par *perspective quadratique* pour faire correspondre les points de deux plans. On peut s'en servir aussi pour établir une correspondance entre les points de figures quelconques dans l'espace, ou entre les points d'une figure plane et ceux d'une figure de l'espace. Nous allons montrer, à titre d'exemple, que l'on en déduit un moyen bien simple de *faire correspondre* (*birationnellement*) *à une courbe plane algébrique n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes une courbe algébrique gauche sans points singuliers* (¹).

Les raisonnements qui suivent reposent sur cette remarque d'Algèbre que, *étant données un nombre quelconque d'équations algébriques entre des indéterminées* u, v, w, h, ...,

$$f_1(u, v, \ldots) = 0, \qquad f_2(u, v, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(u, v, \ldots) = 0,$$

il existe toujours des valeurs de $u, v, w, h, \ldots$ *qui ne satisfont à aucune de ces équations, pourvu qu'aucune d'elles ne soit une identité*. En effet, dans l'hypothèse contraire, le produit

(¹) *Voir*, à ce sujet, une Note de M. POINCARÉ dans les *Comptes rendus de l'Académie* (3 juillet 1893).

$f_1 f_2 \ldots f_p$ serait identiquement nul, sans qu'aucun de ses facteurs le soit.

Cela posé, soit

$$(C) \qquad \zeta = 0, \quad f(\xi, \eta) = 0$$

une courbe algébrique plane n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes; et soit une congruence linéaire, ayant deux directrices rectilignes distinctes A et B, dont les pieds α, β dans le plan des xy ne soient pas sur la courbe C. Soit enfin un plan quelconque

$$(P) \qquad P(x, y, z) = ux + vy + wz + h = 0.$$

Par chaque point $M(\xi, \eta)$ de C passe une droite D et une seule appartenant à la congruence : sur cette droite déterminons un point $R(x, y, z)$ par la condition

$$P(x, y, z) = \mu, \qquad \mu = \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Le lieu des points R est une courbe gauche G qui correspond ainsi point par point à C. Je dis qu'on peut disposer des indéterminées u, v, w, h de manière que G n'ait pas de points multiples. C'est ce qui résultera des remarques suivantes :

1° Le degré de G est $c + 2n$, n et c étant l'ordre et la classe de C. On le voit en coupant par le plan des xy; on obtient d'abord les points situés sur $\alpha\beta$, au nombre de n et tous distincts, si α, β sont convenablement choisis, et si le plan P n'est pas parallèle à $\alpha\beta$. On a de plus les solutions du système

$$(K) \qquad (ux + vy + h)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$(C) \qquad f(x, y) = 0.$$

Il y a là n^2 nouveaux points, dont il faut défalquer un certain nombre, à cause des points multiples de C. Or un de ces points ne cesse d'être un point simple de K, à tangente distincte de celles de C, que pour des valeurs particulières de u, v, h, que nous écartons. Nous devons donc retrancher le même nombre de points que pour la détermination de la classe, c'est-à-dire $n(n-1) - c$.

Il reste donc un nombre de points égal à

$$n^2 - [n(n-1) - c] = c + n.$$

Et l'on a bien en tout $c + 2n$ points d'intersection, que l'on peut supposer tous distincts; de sorte que ce sont des points simples de la courbe gauche G.

2° Les directions asymptotiques de G sont distinctes. D'abord c de ces directions proviennent des valeurs infinies de μ, qui, par un choix convenable des axes de coordonnées, correspondent à des points M distincts. Deux d'entre elles ne seraient parallèles que si c'étaient des droites de la congruence rencontrant à l'infini l'une des directrices A ou B. Mais alors les points M correspondants seraient sur l'une des droites d'intersection du plan des xy et des plans menés par chacune des directrices parallèlement à l'autre; ce que l'on évite encore par un choix convenable des axes.

Les autres directions asymptotiques proviennent des droites D parallèles au plan P. Ces droites sont sur un paraboloïde qui coupe le plan des xy suivant une conique γ, passant en α et β et coupant C en $2n$ points qu'on peut supposer distincts, puisqu'on peut se donner γ *a priori* et choisir ensuite A, B et P. On a donc là $2n$ directions asymptotiques nouvelles, toutes distinctes, et distinctes des précédentes. Donc, en tout, $c + 2n$ points à l'infini, tous distincts et, par conséquent, tous simples sur G.

3° Les points situés sur A ou B sont simples. Soit en effet R_0 un de ces points, situé sur A par exemple, et coupons G par le plan $P = \mu_0$ qui passe par R_0. Il y a $2n$ points d'intersection à l'infini et c à distance finie, correspondant aux points de contact des tangentes à C de coefficient angulaire μ_0. Deux de ces points ne pourraient se confondre en R_0 que dans l'un des trois cas suivants :

a. La droite D_0 correspondante passe par un point multiple de C, d'ordre k par exemple. Mais μ a par hypothèse en ce point k valeurs distinctes, et les k points correspondants situés sur D_0 sont distincts.

b. La droite D_0 a son pied en un point d'inflexion de C. Mais ces points sont en nombre limité, donc aussi les points où les droites D correspondantes rencontrent A et B. On peut donc, d'après la remarque d'Algèbre faite au début, supposer u, v, w, h tellement choisis qu'aucun de ces derniers points ne soit dans le plan $P = \mu$ qui lui correspond.

c. Par R_0 passent deux droites D_0. Les pieds de ces droites, M_0 et M'_0, sont alors sur un même rayon issu de α, et les tangentes en ce point sont de plus parallèles. Or cela n'arrive que pour un nombre limité de rayons passant par α (α étant quelconque) et par suite il n'y correspond qu'un nombre limité de points de A; on peut donc encore supposer qu'aucun d'eux n'est dans le plan $P = \mu$ correspondant, c'est-à-dire qu'aucun d'eux n'est un point R_0.

Tout point R_0 est donc bien simple.

4° Tout point R de G, autre que les précédents, est simple. Coupons en effet par le plan (RA). Il n'y aurait deux points de l'intersection confondus en R que si la trace αM de ce plan sur le plan des xy était tangente en M (point homologue de R) à la courbe C. Mais alors le fait analogue ne peut se produire en coupant par le plan (RB), à moins que M ne soit un point multiple de C, ce qui n'a pas lieu si l'on prend α et β en dehors des tangentes aux points multiples de C.

Le théorème est donc démontré, car, en vertu de la remarque préliminaire, on peut satisfaire simultanément, par un choix convenable des indéterminées de la transformation, aux diverses conditions d'inégalité que nous avons dû introduire successivement.

4. Remarquons encore que notre courbe G a certainement des cordes qui ne la rencontrent qu'en deux points; car, dans le plan (βA), par exemple, il n'y a de points de la courbe que sur $\alpha\beta$ et sur A; de sorte qu'en joignant un des n premiers points à un des $c + n$ autres, on a l'une des cordes annoncées. Si donc on fait la perspective linéaire de G sur un plan, avec un point de vue arbitraire, on obtiendra une courbe C' n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes. Nous avons donc là une démonstration nouvelle de ce théorème connu :

Toute courbe plane algébrique C *n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes peut être transformée, par* *une transformation birationnelle, en une courbe plane algébrique* C' *n'ayant pas d'autres singularités que des points doubles à tangentes distinctes* (1).

Notre démonstration nous paraît présenter cet intérêt que l'on pourrait écrire immédiatement la transformation qui change C en C'.

Enfin la même méthode s'appliquera encore pour faire correspondre à une courbe algébrique plane *quelconque* une courbe gauche n'ayant aucun point singulier. Il suffira de remplacer, dans ce qui précède, la quantité μ par une de ces fractions rationnelles qu'Halphen a appris à former (2), et qui jouissent de cette propriété de se développer, pour les points de chacun des cycles de la courbe donnée

$$x = x_k + t_k^{n_k}, \qquad y = y_k + t_k^{m_k}[t_k],$$

sous la forme

$$\mu = \mu_k + a_k t_h + \ldots, \qquad (a_k \neq 0).$$

On voit alors immédiatement, en prenant par exemple le plan $P = 0$ pour l'un des plans de coordonnées, que G n'aura que des cycles d'ordre égal à 1. On pourra de plus disposer de l'indétermination de μ de manière que les différentes valeurs de μ_k, correspondant aux cycles de C qui ont une origine commune, soient inégales; et dès lors, les raisonnements précédents peuvent se reprendre, avec de simples modifications de détails. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute courbe plane algébrique est la perspective quadratique d'une courbe gauche n'ayant aucun point singulier, et la perspective linéaire de cette dernière n'a que des points doubles à tangentes distinctes, si le point de vue est convenablement choisi.

---

(1) On a longtemps admis ce théorème, sans démonstration rigoureuse. *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 366. M. Simart (*Comptes rendus de l'Académie,* 8 mai 1893), M. Poincaré (*Ibid.*, 3 juillet 1893), M. Bertini (*Mathematische Annalen,* t. XLIV) en ont donné depuis diverses démonstrations.

(2) *Voir*, par exemple, son *Étude sur les points singuliers,* dans le *Traité de Géométrie* de Salmon.