SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 217-220
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__217_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Cahen : *Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler.*

M. D. André : *Sur un théorème empirique d'Arithmétique.*

M. Carvallo : *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du mouvement de propagation en Physique mathématique.*

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Fouret : *Sur un théorème de Mécanique.*

M. Émile Picard transmet une Note de M. E. Cartan *Sur un théorème de M. Bertrand.*

M. Laisant fait la Communication suivante :

Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace.

J'ai donné récemment, à la Société Philomathique, la démonstration du théorème suivant :

Si un point matériel, M, *animé de la vitesse* MV, *et soumis à la force* MF, *satisfait à la loi des aires par rapport à un point fixe* O, *c'est-à-dire si les aires décrites par* OM *sur la surface du cône de sommet* O *sont proportionnelles aux temps, les deux plans* OMV, OMF *sont constamment perpendiculaires.*

La démonstration que j'ai communiquée à la Société Philomathique, bien que facile, peut encore être simplifiée d'une façon qui rend pour ainsi dire le théorème intuitif et se prête à une intéressante généralisation.

Si en effet nous posons $\text{p} = \mathfrak{v}\left(\text{m}\,\frac{d\text{m}}{dt}\right)$, l'extrémité du vecteur p, vitesse aréolaire, décrira une courbe (P) que j'ai appelée l'*hodographe aréolaire* des mouvements. La vitesse de ce point P sera

$$\text{p}' = \frac{d\text{p}}{dt} = \mathfrak{v}\left(\text{m}\,\frac{d^2\text{m}}{dt^2}\right).$$

Or, p′ étant l'axe du plan OMF, p celui du plan OMV, il s'ensuit que l'angle de p′ et de p sera égal à celui des deux plans en question.

Donc *l'angle des deux plans* OMV, OMF *est égal à celui que forme la vitesse sur l'hodographe aréolaire avec le rayon* OP *correspondant.*

Si la loi des aires est vérifiée, la grandeur de OP est constante, l'hodographe (P) est une courbe sphérique, et l'angle de p′ avec p est droit. Nous avons donc, comme corollaire, l'énoncé rappelé au début de cette Note.

Si l'hodographe se réduit à la droite OP, l'angle considéré est nul, et la force est évidemment dirigée dans le plan OMV, le mouvement étant plan.

Si ces deux circonstances se produisent à la fois, nous tombons dans le cas des forces centrales, la force étant dirigée suivant MO. L'hodographe aréolaire se réduit alors à un point.

De là résulte un moyen graphique des plus simples pour avoir le plan osculateur à une courbe donnée (M). Si en effet nous considérons cette courbe comme parcourue d'un mouvement uniforme, il suffira d'élever, par un point fixe O, une perpendiculaire OP au plan OMV et de porter sur cette droite une longueur OP proportionnelle, ou simplement égale, à la distance de O à la tangente MV. On obtiendra ainsi une courbe (P) dont la tangente en P sera perpendiculaire au plan OMF. Donc, en menant par O, ou par M, un plan perpendiculaire à la tangente en P, son intersection avec le plan normal en M donnera la normale principale MF, la force étant normale puisque le mouvement est uniforme.

Appelons r, v, w les grandeurs du rayon OM, de la vitesse et de l'accélération du point M, θ l'angle de la vitesse avec OM, φ celui de l'accélération avec la même droite. Les grandeurs de p et de p′ sont alors $rv\sin\theta$, $rw\sin\varphi$, et il s'ensuit en particulier que le rayon vecteur OP et la vitesse sur l'hodographe aréolaire sont dans le même rapport que les projections de la vitesse et de l'accélération dans le mouvement considéré, sur un plan perpendiculaire à OM.

M. Mannheim adresse la Note suivante :

Nouvelle démonstration d'une propriété de l'indicatrice.

Dans une Communication que j'ai faite à l'Académie des Sciences ([1]), j'ai montré de plusieurs manières comment on peut déterminer les éléments principaux de courbure d'une surface (S) lorsqu'on connaît les centres de courbure de trois courbes de contour apparent de cette surface.

L'une d'elles est fondée sur une propriété de l'indicatrice, qui n'avait pas encore été signalée, et que j'ai seulement énoncée.

Depuis, j'ai donné deux démonstrations de cette propriété ([2]); j'en apporte aujourd'hui une troisième, plus simple encore que les précédentes.

Soient a un point de (S) et A la normale en ce point à cette surface. Projetons (S) sur un plan mené par A au moyen de projetantes perpendiculaires à ce plan; on obtient ainsi une courbe de contour apparent dont le centre de courbure correspondant à a est un point de A.

Il s'agit de faire voir que :

Les rayons de courbure en a des courbes de contour apparent de (S), *obtenues sur des plans menés par* A *au moyen de projetantes respectivement perpendiculaires à ces plans, sont proportionnels aux carrés des distances de a aux tangentes de l'indicatrice de* (S) *en ce point, tangentes qui sont parallèles à ces projetantes.*

Appelons I l'indicatrice de (S), courbe qui est tracée sur le plan tangent en a à cette surface.

Les tangentes à cette courbe parallèles aux projetantes forment

---

([1]) Séance du 13 août 1894.
([2]) *Messenger of Mathematics,* août 1894.

l'indicatrice du cylindre circonscrit à la surface (S), cylindre qui la projette orthogonalement sur un plan mené par A.

Appelons c le point de contact d'une de ces tangentes avec I et p le pied de la perpendiculaire abaissée de a sur cette droite.

Désignons par R le rayon de courbure pour le point a de la section faite dans le cylindre par le plan (A, ap); R est le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de (S) projeté sur A.

Désignons par ρ le rayon de courbure de la section faite dans le cylindre par le plan (A, ac); ρ est aussi le rayon de courbure de la section faite par le même plan dans (S).

Puisque la droite cp appartient à l'indicatrice du cylindre, on a

$$\frac{R}{\overline{ap}^2} = \frac{\rho}{\overline{ac}^2}.$$

Ce dernier rapport est constant, lorsque la direction des projetantes varie, puisque les points tels que c sont toujours sur I. Le rapport $\frac{R}{\overline{ap}^2}$ est alors constant, quel que soit le plan mené par A, et la propriété est démontrée.

Appelons R_1, R_2 les rayons de courbure principaux de (S) en a, φ l'angle des projetantes avec le grand axe de I et α, β les demi-axes de cette indicatrice. On a

$$\frac{R}{\overline{ap}^2} = \frac{R_1}{\alpha^2},$$

mais

$$\overline{ap}^2 = \alpha^2 \sin^2\varphi + \beta^2 \cos^2\varphi;$$

on a alors

$$R = R_1 \sin^2\psi + \frac{\beta^2 R_1}{\alpha^2} \cos^2\varphi.$$

Comme $\frac{\beta^2 R_1}{\alpha^2} = R_2$, il vient $R = R_1 \sin^2\varphi + R_2 \cos^2\varphi$, qui est l'expression connue.