BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 28-36

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__28_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

PRINCIPES DE LA MÉTHODE DE M. ARNOUX CONCERNANT L'ÉTUDE DES ESPACES ARITHMÉTIQUES HYPERMAGIQUES;

Par M. C.-A. Laisant.

Préliminaires. — L'un de nos collègues de la Société mathématique, M. Arnoux, ancien officier de marine, s'est livré depuis de longues années à des recherches curieuses sur l'étude des carrés magiques, à laquelle il a donné une extension, fort remarquable à mon avis. Les principes de ses méthodes se trouvent développés dans un volume, actuellement sous presse, intitulé : *Arithmétique graphique; les espaces arithmétiques hypermagiques,* et qui sera probablement publié dans quelques semaines. L'auteur, qui vit dans une petite commune des Basses-Alpes, en dehors du mouvement mathématique contemporain, a bien voulu faire appel à mon amitié pour me demander de l'aider dans la rédaction de ce volume; j'ai donc été conduit à étudier ses méthodes avant qu'elles n'aient été soumises au public, et il m'a semblé intéressant d'en faire connaître la substance à la Société mathématique.

Il y a en effet une telle originalité, une telle puissance d'invention dans les méthodes dont il s'agit, que je serais bien étonné si l'Arithmétique n'arrivait pas quelque jour à les utiliser, soit pour obtenir des démonstrations plus simples de vérités connues déjà, soit pour découvrir des vérités nouvelles.

Pour faire comprendre comment l'auteur pose le problème de l'hypermagie, il faut tout d'abord reproduire quelques définitions qui sont à la base de sa méthode; il importe de bien comprendre en effet que les constructions de carrés magiques, ou d'espaces magiques en général, auxquelles il s'est appliqué, n'ont guère été pour lui qu'une occasion d'utiliser des idées générales, ayant une bien autre portée qu'un simple amusement arithmétique.

Espaces arithmétiques modulaires. — Si l'on imagine une ligne droite sur laquelle sont placés m objets (ou m nombres) équidistants, et si la figure formée par ces objets se reproduit indéfiniment sur le prolongement de cette droite dans les deux sens, la disposition qui en résulte est appelée par l'auteur un *espace arithmétique à une dimension, de module m.* Dans un tel espace modulaire infini, tous les faits constatés, toutes les nouvelles figures tracées dans un segment quelconque, pareil à celui qui a servi de point de départ, pourront être reproduits dans celui-ci, qui sera en quelque sorte l'*image* de la succession infinie dont nous venons de parler. On représentera ainsi l'espace modulaire infini par une figure comprenant m objets seulement.

Par exemple, soit $m = 5$ et supposons les cinq objets a, b, c, d, e composant l'espace modulaire à une dimension

$$\ldots \quad a\ b\ c\ d\ e\ a\ b\ c\ d\ e\ a\ b\ c\ d\ e\ a\ b\ c\ d\ e\ a\ b\ c\ d\ e \quad \ldots$$

Si, partant de la première position a pour origine, en prenant pour unité les intervalles consécutifs, nous suivons une *marche* régulière dont le *pas* soit 1, nous trouverons les objets dans l'ordre écrit ci-dessus, c'est-à-dire $a\,b\,c\,d\,e$ indéfiniment reproduits. Une marche de *pas* 2 donnerait $a\,c\,e\,b\,d$, le *pas* 3, $a\,d\,b\,e\,c$, etc... Le *pas* 5, seul, donnerait dans cet exemple, $a\,a\,a\,\ldots$, ou $b\,b\,b\,\ldots$, c'est-à-dire des objets identiques à celui d'où l'on est parti; et toujours la période ainsi obtenue pourra être figurée dans le premier segment $a\,b\,c\,d\,e$.

Une marche qui rencontre tous les objets différents est dite une *marche magique.* Une marche dont le pas serait 5 ou un multiple de 5 (en général m ou un multiple de m) serait une *marche des identiques,* ou *d'invariation.*

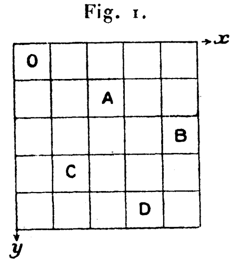
On comprend déjà toute l'analogie qui rattache ces considérations graphiques à la théorie des congruences, que M. Arnoux considère toujours comme de simples équations où l'on doit faire $m = 0$. On voit aussi qu'il y aura une distinction capitale à établir entre les cas où le module est premier et ceux où il est composé. Nous ne nous occuperons à peu près que du cas de m premier, le plus simple de beaucoup, dans cette exposition sommaire.

Si, au lieu d'un segment sur lequel sont portés m objets, nous supposons m^2 objets placés sur m segments pareils, parallèles et équidistants, par exemple dans les m^2 cases d'un carré, et si par la pensée nous imaginons ce carré reproduit identiquement dans le sens de ses deux dimensions, et dans toute l'étendue du plan auquel il appartient, nous aurons de même un espace arithmétique à deux dimensions, de module m, qui trouvera sa représentation ou son image, dans le carré primitif. Une case quelconque de cet espace aura deux coordonnées x, y qui pourront l'une et l'autre être considérées comme plus petites que m, puisqu'il ne faudra jamais prendre que les restes des divisions par m, pour tout ramener au premier carré.

On voit encore qu'un cube de m^3 cases pourra représenter un espace arithmétique de module m à trois dimensions, exactement de la même manière. Un espace à quatre dimensions serait figuré par une collection de m cubes pareils, supposés par exemple rangés en file. L'une quelconque des m^4 cases aurait *quatre* coordonnées, les trois premières, x, y, z par exemple, indiquant sa position dans son cube, et la quatrième t, le numéro de ce cube dans la file des m cubes. Il est facile de s'élever ainsi à la conception d'un espace arithmétique modulaire à autant de dimensions qu'on voudra, et à la possibilité de représenter matériellement de tels espaces. Nous nous bornerons exclusivement ici aux espaces à deux dimensions, qui suffisent pour donner une idée des principes essentiels, principes faciles à étendre ensuite aux espaces supérieurs.

Directions dans un espace à deux dimensions, de module premier. — Reprenons, pour plus de simplicité, l'exemple

Fig. 1.



de $m = 5$ et supposons un carré de 25 cases. Si, partant de la case origine O située à gauche et en haut, nous choisissons une autre case quelconque du carré, A, ayant par exemple pour coordonnées $x = 2$, $y = 1$, et si nous traçons la droite OA sur l'espace indéfini, par les centres des deux cases, nous obtiendrons, en marchant sur cette droite du même pas régulier OA, la succession des cases O, A, B, C, D, indéfiniment reproduites dans le même ordre. On trouvera donc 5 cases différentes, et 5 cases seulement, en suivant cette marche. Il est aisé de se rendre compte de deux faits : le premier, c'est qu'il en serait de même si l'on partait de toute autre case que O ; le second, c'est que, en partant de O, et marchant du pas OA, ou OB, OC, OD, on retombera toujours sur les 5 mêmes cases dans un certain ordre. C'est à un tel groupe, répondant à des cases qui sur l'espace indéfini se trouveraient en ligne droite, qu'on donne le nom de *ligne arithmétique,* de direction donnée; et l'ensemble des lignes arithmétiques de même direction, obtenues en partant des diverses cases, forme une *direction arithmétique.*

On voit, en partant de l'origine O, que la même case ne peut appartenir à deux directions différentes; comme il y a 25 cases en tout (m^2 en général) et que chaque direction partant de O rencontre 4 cases ($m - 1$ en général) non compris O, le nombre des directions possibles est donc $\frac{24}{4} = 6$ $\left(\text{en général } \frac{m^2 - 1}{m - 1} = m + 1\right)$.

Une direction quelconque est caractérisée par les coordonnées a, b de la première case à atteindre en partant de l'origine, et que M. Arnoux représente par le symbole $ax + by$. Il désigne en outre par $((m))$ l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ inférieurs à m, et en écrivant $((m))(ax + by)$ il a l'expression d'une direction arithmétique de l'espace. Par exemple, la direction figurée plus haut s'écrirait $((5))(2x + 1y)$ et exprimerait qu'on rencontre successivement les cases dont les coordonnées sont :

$$\left.\begin{array}{llllll} x. & 0.2 \equiv 0, & 1.2 \equiv 2, & 2.2 \equiv 4, & 3.2 \equiv 1, & 4.2 \equiv 3 \\ y. & 0.1 \equiv 0, & 1.1 \equiv 1, & 2.1 \equiv 2, & 3.1 \equiv 3, & 4.1 \equiv 4 \end{array}\right\} \pmod{5}.$$

Directions magiques, espaces hypermagiques. — Si l'on suppose que le carré représentatif de l'espace à deux dimensions de module m ait ses cases remplies par les m^2 nombres différents

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m^2 - 1,$$

suivant une disposition quelconque, la somme de tous ces objets est $\frac{m^2(m^2-1)}{2}$. Le quotient de cette somme par m est

$$\frac{m(m^2-1)}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{2};$$

c'est ce qu'on appelle la *somme magique* correspondant au module m.

Ceci posé, si chaque ligne comprise dans une direction arithmétique déterminée, dans le carré dont nous venons de parler, contient des éléments dont la somme soit précisément $\frac{(m-1)m(m+1)}{2}$, on dira que cette direction est *magique*. Et un espace à deux dimensions est *hypermagique,* quand il présente le plus grand nombre possible de directions magiques.

On reconnaît que la définition ordinaire des carrés magiques revient à dire que les *directions* $((m))(1x+0y)$ et $((m)(0x+1y)$ sont magiques, et qu'il en est de même des deux *lignes* diagonales du carré.

Si les quatre *directions* $((m))(1x+0y)$, $((m))(0x+1y)$, $((m))(1x+1y)$, $((m))(1x-1y)$ sont magiques, on a un carré diabolique, selon la définition d'Édouard Lucas, c'est-à-dire un carré magique qui reste encore magique si, après l'avoir sectionné verticalement ou horizontalement, on fait permuter entre elles les deux parties ainsi obtenues.

Position fondamentale principale. — Reprenons encore l'exemple $m=5$, et supposons que nous ayons écrit les 25 nombres 0, 1, 2, ..., 24 dans leur ordre sur 5 lignes horizontales de manière à former un carré

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Cette disposition, qui s'étend d'elle-même à un module quelconque, est ce que l'auteur appelle la *position fondamentale principale* du carré de module 5.

Cette position fondamentale, si nous employons pour écrire les nombres le système de numération de base 5, deviendra

00	01	02	03	04
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

Méthode des abaques. Transformation en quinconce. — En séparant les deux chiffres, dans la figure précédente, on obtient les deux Tableaux ;

$$(\alpha)\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}\right\}(\beta)$$

auxquels M. Arnoux donne le nom d'*abaques*.

Dans le premier abaque, toute direction, à l'exception de celle des x, rencontrera les cinq nombres différents 0, 1, 2, 3, 4 ; de même dans le second, à l'exception de la direction des y. Il en serait encore de même si l'on formait une permutation quelconque des colonnes, ne modifiant pas le premier abaque, ou des lignes horizontales ne modifiant pas le second.

Donc la position fondamentale principale, et toutes celles qui s'ensuivent par permutation des lignes ou des colonnes, sont telles que toutes les directions sont magiques, sauf celles des x et des y. En effet, on aura pour somme des éléments rencontrés par une ligne de direction quelconque (sauf les deux exceptions) : $(0+1+2+3+4)5+(0+1+2+3+4)$, et, en général, $\frac{(m-1)m}{2}m+\frac{(m-1)m}{2}=\frac{(m-1)m(m+1)}{2}$, c'est-à-dire précisément la somme magique, qui est 60 dans notre exemple.

La position fondamentale principale donne donc un carré hypermagique, et il en est de même de toutes les positions fondamentales obtenues par permutation, dont nous venons de parler ; mais il faut le modifier si l'on veut lui donner la disposition habituelle des carrés magiques. Pour cela, on écrira

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = a'x + b'y,$$

les deux cases $ax + by$ et $a'x + b'y$ ne devant pas appartenir à une même direction en partant de la case origine, et l'on formera le carré nouveau en prenant successivement les éléments contenus dans les cases

$$\begin{array}{llll} 0.\xi + 0.\eta, & 1.\xi + 0.\eta, & \ldots. & (m-1).\xi + 0.\eta, \\ 0.\xi + 1.\eta, & 1.\xi + 1.\eta, & \ldots. & (m-1).\xi + 1.\eta, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots. & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0.\xi + (m-1).\eta, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & (m-1).\xi + (m-1).\eta, \end{array}$$

pour avoir les différentes lignes horizontales du nouveau carré. Cela donne lieu à un calcul des plus faciles, et cela correspond en somme à la formation d'une figure construite dans l'espace modulaire indéfini, en forme de quinconce, en partant des deux bases $ax + by$, $a'x + b'y$.

Soit graphiquement, soit par un calcul tout à fait simple, il est donc possible de construire des carrés hypermagiques qui offriront toujours *deux* directions non magiques. Ces directions seront les transformées des x et des y dans la transformation qui vient d'être indiquée. Il est visible, en effet, que, dans cette transformation, toute ligne droite correspond à une droite, toute direction à une direction, et réciproquement.

Si a, b, a', b' sont choisis de telle sorte que $1\xi \pm 1\eta$ ne soit dirigé ni suivant les x, ni suivant les y, le carré obtenu sera diabolique. Nous nous bornerons à donner ici le résultat obtenu par la transformation $\xi = 2x + 1y$, $\eta = 1x + 2y$:

$$\begin{array}{rrrrrl} 0 & 7 & 14 & 16 & 23 & \rightarrow \xi \\ 11 & 18 & 20 & 2 & 9 & \\ 22 & 4 & 6 & 13 & 15 & \\ 8 & 10 & 17 & 24 & 1 & \\ 19 & 21 & 3 & 5 & 12 & \\ \downarrow & & & & & \\ \eta & & & & & \end{array}$$

Les seules directions non magiques sont données par $1\xi + 2\eta$ et $2\xi + 1\eta$.

Les abaques $(\alpha)(\beta)$ ci-dessus nous ont servi à établir la démonstration, et devraient subir des transformations correspondantes, devenant ainsi (α') et (β'). Le carré hypermagique ci-dessus pourrait se représenter alors symboliquement par $5(\alpha')+(\beta')$ et en général par $m(\alpha')+(\beta')$; cela signifierait qu'à chaque élément de (β') il faut ajouter l'élément correspondant de (α') multiplié par m, pour former le carré définitif. Toute direction magique de ce dernier correspond à une direction magique dans chacun des abaques, d'après la définition donnée pour les espaces à une dimension. Toute direction non magique correspond à une direction d'invariation dans l'un des deux abaques.

Pour la *construction* d'un carré hypermagique, les abaques ne sont pas nécessaires, d'après la transformation en quinconce décrite plus haut. Mais pour l'analyse d'un carré déterminé, cette méthode est pour ainsi dire indispensable et fournit un précieux moyen d'investigation.

Il est vraiment digne de remarque que la position fondamentale principale, si simple à écrire, représente un carré hypermagique au plus haut point, et que cette propriété n'ait pas encore été constatée, malgré les innombrables travaux relatifs à cette question. Je crois que cela tient à deux causes : la première, c'est qu'on a plutôt cherché jusqu'ici des procédés souvent très ingénieux qu'une méthode allant au fond des choses, comme celle de M. Arnoux; la seconde, c'est qu'on a constamment écrit les carrés magiques d'une façon peu rationnelle, en y faisant figurer les nombres $1, 2, 3, \ldots, m^2$, au lieu de $0, 1, 2, \ldots, m^2-1$. Ce simple changement dans le point de départ était de nature à masquer des propriétés qui deviennent très claires avec cette méthode, et qui amènent tout naturellement à l'emploi du système de numération de base m. Il est bien évident, en effet, qu'un espace magique, avec les définitions courantes, reste magique, et, dans les mêmes conditions, si l'on ajoute ou si l'on retranche à tous les éléments un nombre constant quelconque.

Modules composés. Numération à bases multiples. — Nous ne voulons pas même aborder le problème des espaces à modules composés, beaucoup plus complexe, comme nous l'avons dit, mais nous tenons à faire ressortir une idée très heureuse, à notre avis, dont M. Arnoux a fait usage pour cette étude.

De même qu'il écrit tous les nombres, de o à $m^2 - 1$, au moyen de deux chiffres, lorsque le module m est un nombre premier, de même si m est composé, par exemple, de deux facteurs premiers p, q, il sera possible de représenter un nombre N quelconque inférieur à m^2, de la manière suivante :

Divisons N par q ; le reste q_1 sera inférieur à q, et le quotient N_1 inférieur à p^2q ; on aura $N = N_1 q + q_1$. Divisons N_1 par p ; le quotient N_2 sera inférieur à pq et le reste p_1 inférieur à p ; on aura $N_1 = N_2 p + p_1$. De même $N_2 = N_3 p + p_2$, p_2 étant inférieur à p et N_3 inférieur à q ; posant $N_3 = q_2$, on a donc

$$N = q_2 . p^2 q + p_2 . pq + p_1 . q + q_1.$$

C'est-à-dire que N peut s'écrire avec les *chiffres* p_1, p_2, q_1, q_2 de la manière suivante, qui représente l'expression ci-dessus

$$\begin{array}{cccc} (q) & (p) & (p) & (q) \\ q_2 & p_2 & p_1 & q_1. \end{array}$$

C'est à un semblable système de numération que M. Arnoux a donné le nom de numération *à bases multiples*. On comprend qu'il y a autant de manières d'écrire ainsi un nombre qu'il y a de permutations distinctes des éléments p, p, q, q, et l'on voit aussi comment ces notions peuvent s'étendre au cas où il y a non plus deux facteurs p, q seulement, mais un aussi grand nombre de facteurs qu'on voudra.

Mais nous tenons à terminer cet exposé, que nous aurions voulu pouvoir abréger plus encore, et nous ne pouvons que renvoyer à l'examen du livre de M. Arnoux ceux que de plus complets développements pourraient intéresser.