BULLETIN DE LA S. M. F.

X. ANTOMARI

Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 58-63
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__58_0>

SUR LES SURFACES RÉGLÉES APPLICABLES AVEC PARALLÉLISME DES GÉNÉRATRICES;

Par M. X. Antomari.

Dans une Communication faite il y a quelque temps à la Société mathématique, M. Caronnet a étudié les couples de surfaces applicables dont la distance des points correspondants demeure constante. Il a trouvé deux catégories de surfaces jouissant de cette propriété et les surfaces de l'une de ces catégories sont des couples de surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices. Je me propose de montrer, dans cette Note, comment on peut obtenir les surfaces de cette catégorie en faisant usage de la méthode que j'ai suivie dans ma thèse pour étudier les surfaces réglées, et dont je rappellerai brièvement le principe.

1. Pour étudier une surface réglée, je prends comme variable indépendante l'arc t de la représentation sphérique du cône directeur de la surface, et j'introduis trois fonctions de cet arc, que j'appelle les trois invariants de la surface, que je désigne par les lettres θ, h et k et qui sont définies de la manière suivante :

θ est la courbure géodésique de la représentation sphérique du cône directeur;

h et k sont les quotients respectifs par dt (angle de deux génératrices infiniment voisines) des projections, sur la génératrice et sur la normale au plan asymptote, du déplacement infiniment petit du point central sur une génératrice. J'ajoute que k n'est autre chose que le paramètre de distribution des plans tangents.

2. Soit OX une génératrice mobile sur la surface, O désignant le point central sur cette génératrice.

Imaginons un premier trièdre trirectangle fixe (o, xyz), et un autre trièdre trirectangle mobile (O, XYZ) présentant la même disposition que le premier et dont les arêtes respectives sont : la génératrice OX, la normale OZ au plan asymptote menée par le point central et la normale OY à la génératrice menée par le même point dans le plan asymptote; puis appelons α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe OX rapporté au trièdre fixe, α_1, β_1, γ_1 ceux de

OY et α_2, β_2, γ_2 ceux de OZ, ces neuf cosinus étant supposés définis en fonction de t. Appelons enfin x, y, z les coordonnées, fonctions de t, du point central O, rapporté au trièdre fixe (o, xyz).

En vertu de la définition de h et de k, on voit immédiatement que la ligne de striction de la surface est définie par l'équation

$$x = \int (h\alpha + k\alpha_2)\, dt$$

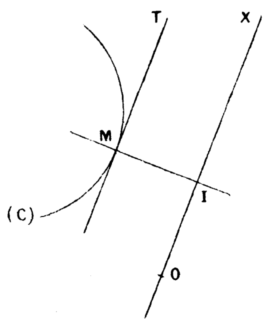
et par deux autres équations analogues. On voit du reste aussi qu'un point quelconque de la surface est défini par l'équation

$$x = \int (h\alpha + k\alpha_2)\, dt + \lambda\alpha,$$

et par deux autres équations analogues.

3. Considérons une surface réglée dont le cône directeur ne soit pas un plan et soit (C) (*fig.* 1) l'arête de rebroussement de la

Fig. 1.



développable circonscrite à l'infini. A tout point M de cette courbe il correspond une génératrice de la surface réglée, parallèle à la tangente en M à la courbe (C) et située, bien entendu, dans le plan osculateur en M à cette courbe. Soit OX cette génératrice et soit MI la perpendiculaire à cette droite menée par M. Désignons par l le segment algébrique MI $= l$, par ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de la courbe (C) en M.

On trouve sans peine :

1° Que l'invariant θ est égal au quotient $\frac{\rho}{\tau}$;

2° Que l'on a les formules

$$k = -\theta l, \qquad h = \rho - (l + l''), \qquad \left(l'' = \frac{d^2 l}{dt^2}\right);$$

3° Que si O est le point central sur OX, on a

$$\mathrm{IO} = \frac{dl}{dt}.$$

4. Inversement, il est clair que toute courbe gauche peut être considérée comme l'arête de rebroussement de la développable asymptote à une surface réglée. Les formules précédentes définissent les invariants de la surface en fonction de la courbure et de la torsion de la courbe.

Lorsque la développable asymptote est un cône, la courbe (C) se réduit à un point et l'on voit sans difficulté comment on passe du cône asymptote à la surface réglée.

5. Si l'on désigne par λ l'abscisse, par rapport au point central, d'un point situé sur une génératrice d'une surface réglée, l'élément linéaire de la surface prend la forme simple

$$dS^2 = d\lambda^2 + 2h\,d\lambda\,dt + (h^2 + k^2 + \lambda^2)\,dt^2.$$

Toutes les propriétés des surfaces réglées, au point de vue de l'applicabilité, résultent de ce que cette expression de l'élément linéaire ne dépend que de h et de k. On voit, en particulier, qu'elle ne change pas quand on change k en $-k$, ce qui conduit immédiatement à la notion des surfaces réglées applicables génératrice par génératrice, et avec parallélisme de ces droites. Si la ligne de striction d'une surface réglée (R) est définie par les équations analogues à

$$x = \int (h\alpha + k\alpha_2)\,dt, \tag{1}$$

celle de la surface (R′) qui lui est applicable avec parallélisme des génératrices est définie par les équations analogues à

$$x_1 = \int (h\alpha - k\alpha_2)\,dt. \tag{2}$$

Voici d'abord quelques conséquences simples de ces formules.

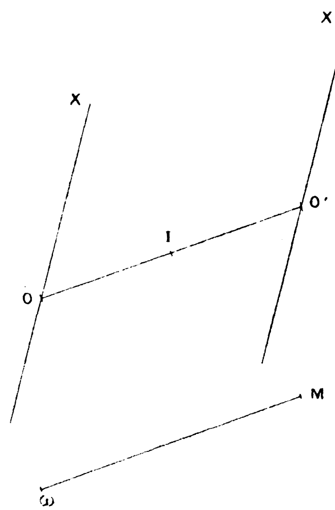
6. Supposons que k et h soient constants, ce qui revient à supposer, comme il est facile de s'en assurer, que (R) et (R′) sont applicables sur l'hyperboloïde de révolution, et formons les expressions analogues à $\frac{x+x_1}{2}$ et à $\frac{x-x_1}{2}$; nous obtenons

$$\frac{x+x_1}{2} = \int h\alpha\, dt = h\int \alpha\, dt, \tag{3}$$

$$\frac{x-x_1}{2} = \int k\alpha_2\, dt = k\int \alpha_2\, dt. \tag{4}$$

Soient O et O′ (*fig.* 2) les points centraux correspondants de (R)

Fig. 2.



et de (R′), et soit I le milieu de OO′; les formules analogues à (3) signifient que la trajectoire du point I est une courbe à *courbure constante*. Pareillement, si par un point fixe ω on mène le vecteur ωM parallèle et égal à OO′, les formules analogues à (4) montrent que le lieu du point M est une courbe à *torsion constante*.

On serait conduit, bien entendu, à des résultats analogues si h seul ou k seul était constant.

7. Arrivons maintenant aux surfaces réglées applicables géné-

ratrice par génératrice et de telle sorte que la distance des points correspondants demeure constante.

Il est clair d'abord que les génératrices correspondantes devront être parallèles; les lignes de striction des deux surfaces seront donc définies par les formules (1) et (2). Appelons, comme plus haut, (R) et (R′) les deux surfaces, O et O′ (*fig.* 2) les points centraux correspondants, ωM le vecteur égal et parallèle à OO′ mené par un point fixe ω. Par hypothèse la longueur ωM est constante; il en résulte que la tangente en M à la trajectoire de ce point est perpendiculaire à ωM. Mais des formules (1) et (2) on déduit que $x - x_1 = 2\int k\alpha_2\,dt$; d'où il suit que la tangente en M à la trajectoire de ce point est parallèle à la direction α_2, β_2, γ_2. La direction α_2, β_2, γ_2 est donc perpendiculaire à OO′ et aux génératrices OX et O′X′ des deux surfaces menées respectivement par O et O′; il en résulte qu'elle est perpendiculaire au plan de ces deux droites. Or, le plan mené par OX perpendiculairement à la direction α_2, β_2, γ_2 est le plan asymptote à la surface (R); pareillement le plan mené par O′X′ perpendiculairement à α_2, β_2, γ_2 est le plan asymptote à la surface (R′). Donc ces deux plans coïncident et les deux surfaces sont inscrites dans la même développable asymptote; par suite, on peut les obtenir toutes deux en partant de la même courbe gauche, par le mode de description indiqué au n° 4. Appelons θ, h et k les invariants de (R); ceux de (R′) sont θ, h et $-k$. Mais si l'on désigne par ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement de la développable asymptote commune, par l et l_1 les deux segments qui permettent de passer de cette courbe aux deux surfaces respectives (n°s 3 et 4), on a

$$k = -l\frac{\rho}{\tau}, \qquad -k = -l_1\frac{\rho}{\tau};$$

il en résulte

$$l_1 = -l.$$

D'autre part on a aussi

$$h = \rho - (l + l'')$$

et

$$h = \rho - (l_1 + l''_1).$$

On en déduit facilement

$$l + l'' = 0$$

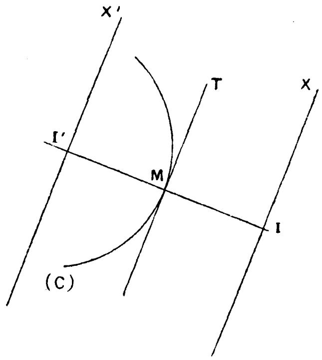
et enfin

$$l = A \sin(t + B),$$

A et B désignant des constantes.

D'après cela, pour obtenir tous les couples de surfaces cherchées, on partira d'une courbe gauche quelconque (C) (*fig.* 3); puis sur

Fig. 3.



la normale principale en un point M, variable sur cette courbe, on portera $MI = A \sin(t + B)$, $MI' = -A \sin(t + B)$ et l'on mènera IX et I'X' parallèles à la tangente MT. Quand le point M parcourt la courbe (C), les droites IX et I'X' engendrent les deux surfaces (R) et (R') répondant à la question.