SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 67-71
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__67_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 AVRIL 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Fleury : *Sur le calcul de l'infini.*

M. Burkhardt : *Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une seule dimension.*

M. Carvallo : *Sur la propriété fondamentale des surfaces minima.*

M. Fehr communique la Note suivante :

Remarque sur le théorème de M. Moutard.

D'après le théorème de M. Moutard ([1]), si l'on sait intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, dy} = \lambda(x, y) z, \tag{1}$$

on peut, en général, en déduire une suite illimitée d'équations nouvelles et de même forme dont on obtiendra l'intégrale au moyen de simples quadratures.

Employons, pour abréger, le symbole

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{1}{z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},$$

et considérons deux équations consécutives de la suite

$$\mathfrak{F}(z) = \lambda, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_i, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_{i+1}, \quad \ldots \tag{2}$$

obtenue d'après le procédé connu. On a, par exemple,

$$\lambda_{i+1} = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\omega_i}\right),$$

ω_i étant une solution particulière de $\mathfrak{F}(z) = \lambda_i$.

([1]) Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, §§ 390-392.

Nous nous proposons de voir si la suite (2) peut être limitée. Il faut pour cela que l'on ait $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, d'où

$$(3) \qquad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\omega_i}\right) = \mathfrak{F}(\omega_i).$$

De là résulte immédiatement que ω_i satisfait à la relation

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \log \omega_i}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

L'équation transformée sera donc identique à l'équation primitive si la solution particulière ω_i est le produit d'une fonction de x par une fonction de y.

On voit facilement que la suite (2) se réduit à l'équation primitive dans laquelle $\lambda(x,y)$ est de la forme $f(x)\varphi(y)$. Dans ce cas, l'équation (1) peut, comme on le sait, toujours être ramenée à la forme simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z\, \partial y} = z.$$

Remarquons encore que, dans ce cas, la méthode de Laplace (¹) transforme également cette équation en elle-même.

M. Zaremba adresse la Note suivante :

Sur la réduction du nombre des périodes d'une fonction périodique.

Nous simplifierons le langage en convenant de dire qu'un système de périodes

$$(1) \qquad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n$$

d'une fonction $f(x)$ est un *système complet* si une période quelconque Ω de $f(x)$ est une fonction linéaire et homogène à coefficients entiers des périodes (1). Cela posé, soit $f(x)$ une fonction pour laquelle le système (1) est un système complet de périodes. On sait que, si les quantités (1) vérifient p relations

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} a_i^k \omega_i = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

(¹) Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, Chap. II, en particulier § 332.

indépendantes, linéaires et homogènes et à coefficients entiers, il existe pour $f(x)$ des systèmes complets de périodes se composant chacun de $n - p$ périodes indépendantes. Je me propose de démontrer ce théorème par une méthode qui offre un certain intérêt en ce sens qu'elle fait connaître un procédé régulier pour calculer les systèmes complets de périodes dont l'existence forme l'objet du théorème. J'établirai dans ce but que, pour la fonction $f(x)$, on peut trouver un système complet

$$(3) \qquad \omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_{n-1},$$

se composant de $n - 1$ périodes. En effet, envisageons l'une des relations (2), celle par exemple qui correspond à $k = 1$,

$$\sum_{i=1}^{i=n} a'_i \omega_i = 0,$$

et supposons d'abord que, parmi les nombres a'_i, il y en ait deux, a'_1 et a'_2, qui soient premiers entre eux. On pourra déterminer deux entiers α et β tels que l'on ait

$$\alpha a'_1 + \beta a'_2 = 1,$$

d'où l'on déduit immédiatement que l'on peut poser

$$\begin{aligned} \omega'_{i-1} &= \omega_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, n), \\ \omega'_1 &= \beta\omega_1 - \alpha\omega_2. \end{aligned}$$

Admettons maintenant que, parmi les nombres a'_i, il n'y en ait pas deux qui soient premiers entre eux, et désignons par Δ le plus grand commun diviseur de a'_1 et a'_2. On pourra alors trouver deux entiers α et β vérifiant l'équation

$$a'_1 \alpha + a'_2 \beta = \Delta,$$

et l'on s'assurera sans peine que le système

$$(4) \qquad \Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_n,$$

défini par les équations

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \omega_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, n), \\ \Omega_2 &= \frac{a'_1}{\Delta}\omega_1 + \frac{a'_2}{\Delta}\omega_2, \\ \Omega_3 &= \beta\omega_1 - \alpha\omega_2, \end{aligned}$$

est un système complet de périodes de la fonction $f(x)$. L'une des p relations, analogues aux équations (2), qui existent entre les périodes (4) sera la suivante :

$$\Delta\Omega_2 + \sum_{i=3}^{i=n} a'_i \Omega_i = 0.$$

Si, parmi les nombres

$$\Delta, \quad a'_3, \quad a'_4, \quad \dots, \quad a'_n,$$

il s'en trouve deux qui soient premiers entre eux, on déduira aisément du système (4) le système (3); il suffira d'appliquer ce qui a été dit dans le cas où a'_1 et a'_2 sont premiers entre eux. S'il n'en est pas ainsi, on déduira du système (4), par le procédé qui a servi à déduire celui-ci du système (1), un nouveau système complet de périodes

$$\Omega'_1, \quad \Omega'_2, \quad \dots, \quad \Omega'_n$$

de $f(x)$, tel que, parmi les p relations existant entre ces périodes, il y en ait une ne contenant ni Ω'_1 ni Ω'_2.

Il résulte de là qu'en effectuant $n - 1$ opérations au plus, analogues à celle au moyen de laquelle on a obtenu le système (4), on parviendra à un système complet de périodes

$$\Omega^s_1, \quad \Omega^s_2. \quad \dots, \quad \Omega^s_n$$

de $f(x)$, d'où l'on pourra déduire un système tel que le système (3). D'ailleurs, comme rien n'empêche d'opérer sur le système (3) comme on l'a fait sur le système (1), il est évident que la fonction $f(x)$ admettra un système complet de périodes ne comprenant que $n - p$ périodes

$$(5) \qquad \varpi_1, \quad \varpi_2 \quad \dots, \quad \varpi_{n-p}.$$

On s'assurera sans peine que les quantités (5) ne vérifient aucune relation linéaire et homogène et à coefficients entiers. On remarquera aussi qu'il résulte de notre méthode qu'il y a une infinité de systèmes tels que le système (5).

SÉANCE DU 18 AVRIL 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Caronnet : *Sur les courbes que toutes leurs sécantes rencontrent en un troisième point.*

M. Raffy : *Sur l'intégration de certaines différentielles exactes qui dépendent de fonctions arbitraires.*

M. D. André : *Sur le triangle des séquences.*

M. Poincaré : *Sur la théorie des marées.*

M. Raffy : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Balitrand adresse un Mémoire intitulé : *Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi.*