BULLETIN DE LA S. M. F.

H. BURKHARDT

Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une dimension

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 71-75
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__71_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES FONCTIONS DE GREEN RELATIVES A UN DOMAINE D'UNE DIMENSION;

Par M. H. Burkhardt.

Dans la théorie du potentiel logarithmique, on appelle *fonction de Green* relative à un domaine donné de deux dimensions une fonction $G(x, y, \xi, \eta)$ qui satisfait à l'intérieur de ce domaine à l'équation différentielle

$$\Delta G \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0,$$

qui y reste holomorphe, à l'exception du seul point (ξ, η), où elle devient infinie comme $\log r$, r étant la distance de (x, y) à (ξ, η), et qui s'annule sur le contour du domaine. Cette fonction une fois trouvée, l'intégrale double

$$u(x, y) = -\int\!\!\int G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

étendue à tout le domaine donné, fournit la solution du problème suivant : *Étant donnée une fonction arbitraire f, trouver une fonction u, continue dans tout le domaine, qui y satisfasse à l'équation $\Delta u = f$, et qui s'annule sur le contour.*

De même, dans la théorie du potentiel newtonien, on considère la fonction de Green relative à un espace de trois dimensions, qui a des propriétés analogues, $\log r$ étant remplacé par $\frac{1}{r}$; et si l'on voulait aborder la théorie de l'équation de Laplace à plus de trois variables indépendantes, il y aurait lieu de considérer des fonctions devenant nulles comme les puissances supérieures de $\frac{1}{r}$.

On peut se demander quel est le premier terme de cette suite. Existe-t-il quelque chose d'analogue pour des domaines d'une seule dimension, pour des équations du second ordre ordinaires? Il suffit de transformer un peu quelques résultats bien connus pour obtenir une réponse affirmative à cette question. L'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

se fait par deux quadratures superposées; on sait qu'on peut les remplacer par deux quadratures juxtaposées, moyennant une intégration par parties. La solution particulière qui s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$ peut être représentée par

$$u = -\int_a^x \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} f(\xi)\,d\xi - \int_x^b \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} f(\xi)\,d\xi.$$

Cette forme de l'intégrale est celle dont M. Picard se sert, tant dans ses cours à la Sorbonne que dans ses travaux (*Journal de Liouville,* 1890 et 1893). On peut confondre ces deux quadratures en une seule et écrire

$$u = -\int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi)\,d\xi,$$

si l'on convient de désigner par $G_1(x, \xi)$ une fonction de ξ ainsi définie :

$$G_1(x, \xi) = \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} \qquad \text{pour } \xi < x,$$

$$G_1(x, \xi) = \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} \qquad \text{pour } \xi > x.$$

Cette fonction peut être regardée comme la fonction de Green relative au segment de droite ab. Elle se trouve déterminée par les quatre propriétés caractéristiques suivantes :

1° Elle satisfait à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{d\xi^2} = 0$.

2° Elle est finie et continue dans tout l'intervalle (a, b), même pour $\xi = x$.

3° La dérivée première est continue elle aussi, sauf pour $x = \xi$, où elle possède deux valeurs distinctes, dont la différence est égale à -1.

4° Elle s'annule aux deux limites de l'intervalle.

Une cinquième propriété, exprimée par la relation

$$G_1(x, \xi) = G_1(\xi, x)$$

et une sixième, qui consiste en ce que $G_1(x, \xi)$ est positive à l'intérieur de l'intervalle, sont des conséquences des quatre premières.

Dans la théorie du potentiel, on s'est occupé du cas où ce n'est pas la fonction u elle-même qui doit s'annuler sur le contour, mais bien une combinaison linéaire, à coefficients constants, de la fonction et de sa dérivée prise dans le sens de la normale extérieure. On l'écrit habituellement

$$hu + \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Pour les formules suivantes, il sera plus commode d'introduire au lieu de h sa valeur réciproque et d'écrire

$$u + \chi \frac{\partial u}{\partial n}.$$

De même on a, dans notre cas, le problème de déterminer la fonction u par les conditions

$$u - \chi \frac{du}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x = a,$$

$$u + \chi \frac{du}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x = b,$$

la direction positive de l'axe des x entrant dans l'intervalle à

$x = a$ et en sortant à $x = b$. On obtient de ce problème une solution de la même forme que celle du problème spécial ($\chi = 0$), si l'on introduit une fonction $G_3(x, \xi)$ ainsi définie

$$G_3(x, \xi) = \frac{(b + \chi - x)(\xi - a + \chi)}{b - a + 2\chi} \qquad \text{pour } \xi < x;$$
$$G_3(x, \xi) = \frac{(b + \chi - \xi)(x - a + \chi)}{b - a + 2\chi} \qquad \text{pour } \xi > x.$$

Elle a les mêmes propriétés que la fonction G_1, à l'exception de la troisième, qui se trouve remplacée par

$$G - \chi \frac{dG}{d\xi} = 0 \qquad \text{pour } \xi = a,$$
$$G + \chi \frac{dG}{d\xi} = 0 \qquad \text{pour } \xi = b,$$

et de la sixième, qui n'a lieu que pour $\chi > 0$. Or, c'est précisément cette dernière propriété qui a permis à M. Picard de mener à fin les démonstrations de convergence dans ses recherches sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x, u).$$

en supposant données les valeurs de u pour $x = a$, $x = b$. On voit qu'on pourra employer les mêmes méthodes dans le cas $\chi > 0$, le plus important en vue des applications; mais on devra chercher d'autres détours si l'on veut aborder le cas $\chi < 0$. Quand

$$\chi < -(b - a),$$

la fonction G est même négative dans tout l'intervalle et pour toutes les valeurs du paramètre x; alors les méthodes de M. Picard rentrent en vigueur de nouveau, seulement on doit échanger entre eux les résultats relatifs au cas de $f > 0$ et ceux qui correspondent à $f < 0$.

La fonction G_3 relative à l'intervalle (a, b) est égale à la fonction G_1 relative à l'intervalle $(a - \chi, b + \chi)$, théorème dont l'analogue n'est pas connu dans le cas de plusieurs variables indépendantes.

Deux cas particuliers échappent à cette analyse; ce sont

$$\chi = \infty \text{ (c'est-à-dire } h = 0\text{)} \qquad \text{et} \qquad \chi = -\tfrac{1}{2}(b-a);$$

il n'y a pas de fonction de Green, à un seul point singulier, dans ces deux cas. En effet, il n'existe pas de fonction u satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, aux conditions de continuité et à la condition relative aux limites $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$, à moins que l'on n'ait

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0;$$

et, si cette condition est remplie, il en existe une infinité, contenues toutes dans la formule

$$u = \int_a^x f(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \lambda,$$

λ étant arbitraire.

De même, il n'existe pas de fonction u satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, aux conditions de continuité et aux conditions relatives aux limites

$$u + \frac{b-a}{2}\frac{du}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x = a,$$

$$u - \frac{b-a}{2}\frac{du}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x = b,$$

à moins que l'on n'ait

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\,dx = 0;$$

et, si cette condition est remplie, il en existe une infinité contenues dans la formule

$$u = \int_a^x f(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \lambda\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$