BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Recherches sur les surfaces harmoniques. Résumé

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 84-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__84_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

RECHERCHES SUR LES SURFACES HARMONIQUES (RÉSUMÉ)

(Suite et fin);

Par M. L. Raffy.

Nous ne nous occupons dans ces *Recherches* que de déterminer des éléments linéaires jouissant de certaines propriétés assignées à l'avance. Ainsi nous trouvons, entre autres, tous ceux qui conviennent à des surfaces harmoniques en même temps qu'à des surfaces réglées ou à des spirales, et tous ceux qui sont doublement harmoniques. Il y aurait intérêt assurément à connaître les surfaces qui correspondent à ces éléments linéaires. Mais de pareils problèmes sont, en général, comme Ossian Bonnet l'a dit, au-dessus des forces de l'analyse actuelle. Plus d'un, d'ailleurs, parmi ceux que nous résolvons, présentait déjà des difficultés considérables, qu'on pourra mesurer aux ressources mises en œuvre pour les surmonter. Nous allons passer en revue les trois Parties de notre travail.

Première Partie (¹). — Nous commençons (Chap. I) par rappeler le théorème fondamental de M. Massieu et nous le mettons sous une forme particulière qui permet d'en faire deux applications importantes :

Pour qu'un élément linéaire donné

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$

soit réductible à la forme harmonique, il faut et il suffit qu'on puisse, en choisissant convenablement les deux fonctions A *et* W *de la seule variable* v, *satisfaire aux deux équations*

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = G\left(W + A'\int\frac{du}{G}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\mu}{\partial u} - 3A\right)\right] = \frac{2}{G\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{G}\left(W + A'\int\frac{du}{G}\right)\right].$$

Comme première conséquence nous en déduisons (Chap. II) que *toute surface harmonique à lignes d'égale courbure parallèles est applicable sur une surface de révolution* (²). Ce théorème permet de classer (deuxième Partie) les éléments linéaires harmoniques et intervient aussi (troisième partie) dans la recherche de ceux qui conviennent à des spirales.

(¹) Publiée dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, année 1894.

(²) L. Raffy, *Sur une classe de surfaces harmoniques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 424; 1891).

La seconde application (Chap. III) est la détermination complète des surfaces réglées harmoniques. Écartant celles de ces surfaces qui résultent de la déformation de la sphère, nous prouvons que *toutes les autres sont applicables sur des surfaces du second degré, réelles ou imaginaires, à moins qu'elles ne soient applicables sur des surfaces de révolution* (¹). Ce théorème les définit suffisamment, puisque l'on connaît toutes les déformations dans lesquelles les génératrices des surfaces réglées restent rectilignes. Au cours de la démonstration, nous donnons, sans les établir, des formules qui paraissent indispensables à l'étude des quadriques considérées comme surfaces réglées.

Le Chapitre IV est consacré aux intégrales linéaires et quadratiques de l'équation aux cercles géodésiques, telle que l'a présentée M. Darboux (²). Nous montrons d'abord que l'intégrale linéaire n'existe que pour les surfaces de révolution : c'est la réciproque d'une proposition de M. Darboux et la généralisation du premier théorème de M. Massieu. Nous étendons ensuite le second théorème de M. Massieu en prouvant que, s'il existe une intégrale quadratique, la surface est généralement harmonique; mais nous avons bien soin de discuter un cas particulier qui conduit à certaines surfaces représentables géodésiquement sur d'autres surfaces avec conservation d'une seule famille de lignes de longueur nulle. Il va sans dire que l'intégrale quadratique n'existe pas pour toutes les surfaces harmoniques. Nous formons l'équation fonctionnelle dont dépendent les éléments linéaires à intégrale quadratique et nous en indiquons diverses solutions.

Deuxième Partie (³). — La deuxième Partie a pour objet la *détermination des éléments linéaires doublement harmoniques.* Il s'agit de trouver *toutes* les fonctions $\varphi(x+y)$ et $f(x-y)$ qui vérifient, conjointement avec deux autres fonc-

---

(¹) L. Raffy, *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 223; 1890).

(²) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, Livre VI, Chap. VII.

(³) Publiée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, tome X; 1894.

tions inconnues $X(x)$ et $Y(y)$, l'équation différentielle indéterminée

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{aligned} &(X''+Y'')(\varphi-f)+3(X'-Y')\varphi' \\ &\qquad -3(X'+Y')f'+2(X-Y)(\varphi''-f'')=0. \end{aligned} \right.$$

Pour en faciliter la résolution, nous commençons (Chap. I) par classer les éléments linéaires harmoniques en appliquant, avec des simplifications appropriées, la méthode des différentiations réitérées, dont Abel a donné le principe. Cette analyse conduit à distinguer successivement les développables, puis les surfaces à courbure totale constante, puis les surfaces de révolution doublement harmoniques. Elle montre que, *si un élément linéaire donné sous la forme harmonique* $(\varphi - f)\,dx\,dy$ *n'appartient à aucune de ces trois catégories de surfaces, la différence* $X - Y$ *est déterminée à un facteur constant près,* ses deux dérivées logarithmiques pouvant être tirées de l'équation précédente. On arrive ainsi aux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel élément linéaire soit doublement harmonique.

Le Chapitre se termine par l'exposé de deux lois intuitives (¹) qui, bien qu'essentiellement distinctes, concourent à faire connaître des exemples nouveaux d'éléments linéaires doublement harmoniques; l'une est la *loi de passage,* l'autre la *loi de réciprocité.* La première détermine, dans tous les cas qui exigent des intégrations, l'ensemble des solutions X et Y qu'admet l'équation (E) quand les fonctions φ et f sont données. La seconde, qui permet, connaissant un système de solutions X, Y, φ et f de cette équation, d'en écrire un autre sans calcul, fournit alors de nouvelles solutions à l'aide des précédentes.

C'est pourquoi nous effectuons au Chapitre II la recherche de toutes les solutions de l'équation (E) quand $(\varphi - f)\,dx\,dy$ est l'élément linéaire d'une développable ou d'une surface à courbure constante.

Pour la même raison, je résume au Chapitre III les calculs par lesquels j'avais déterminé (²), ne connaissant pas la solution en-

(¹) L. Raffy, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. CIX, p. 609; 1889).

(²) L. Raffy, *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Comptes rendus* core inédite de M. Darboux, les éléments linéaires des surfaces de révolution doublement harmoniques. J'établis en passant que *deux pareilles surfaces, choisies d'une manière quelconque, peuvent être représentées géodésiquement l'une sur l'autre*, et je donne toutes les solutions correspondantes de l'équation (E).

Avec le Chapitre IV nous abordons la recherche générale des éléments linéaires doublement harmoniques. Après les avoir classés d'après le nombre de leurs intégrales quadratiques, nous rappelons celui que M. Darboux a découvert,

$$ds^2 = \left[\frac{P}{(\xi+\eta)^2} + \frac{Q}{(\xi-\eta)^2} + \frac{P_1}{(1+\xi\eta)^2} + \frac{Q_1}{(1-\xi\eta)^2}\right] d\xi\, d\eta,$$

et qui a déjà été mentionné précédemment. Nous montrons comment il devait nécessairement s'offrir dès qu'on appliquait [1] les deux lois de passage et de réciprocité à l'élément linéaire $(x+y)^{-2}\,dx\,dy$ des surfaces à courbure constante et nous réunissons dans un tableau les dix solutions nouvelles auxquelles conduit cette application (les surfaces de révolution doublement harmoniques n'en fournissent pas). A ce moment, nous nous trouvons connaître, comme éléments doublement harmoniques : 1° ceux des surfaces développables (six formes); 2° ceux des surfaces à courbure totale constante (cinq formes); 3° ceux des surfaces de révolution doublement harmoniques (seize formes); 4° les éléments linéaires réciproques de ceux des développables (cinq formes); 5° les éléments linéaires réciproques de ceux des surfaces à courbure totale constante (cinq formes).

Le reste du Chapitre est employé à démontrer qu'*il n'en existe point d'autres,* ainsi que je l'avais depuis longtemps pressenti [2]. A cet effet, je commence par établir que *toutes les fonctions* X, Y, φ, f *qui satisfont à l'équation* (E) *sont des fonctions uniformes*, propriété importante, dont j'expose deux démonstrations,

---

des séances de l'Académie des Sciences, t. CVIII, p. 493; 1889). — *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII$_2$, p. 161; 1889).

(1) L. Raffy, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIX, p. 609; 1889).

(2) Même Communication.

la première fondée sur les résultats précédemment acquis, la seconde directe. Toutes deux procèdent de cette remarque qu'il n'y a qu'à prouver l'uniformité de l'une des quatre fonctions X, Y, φ et f.

Toutes les solutions de l'équation (E), dans le cas des développables, des surfaces à courbure constante et des surfaces de révolution doublement harmoniques sont uniformes; il suffit donc de montrer qu'il en est encore de même quand l'élément linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ n'appartient à aucune de ces trois catégories de surfaces. C'est là l'objet du premier raisonnement : supposant que les fonctions considérées et leurs dérivées des deux premiers ordres n'ont aucune ligne de discontinuité, je montre en quelques lignes que, si X ou Y n'était pas uniforme, les dérivées logarithmiques de X — Y dépendraient d'au moins une constante arbitraire, contrairement au théorème du Chapitre I.

La seconde démonstration [1] repose sur la propriété de l'équation (E) de pouvoir être intégrée deux fois, de manière à fournir Y, par exemple, au moyen de quadratures, quand les autres fonctions sont considérées comme connues. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}(\varphi - f)^2\,Y = X(\varphi - f)^2 + 3X'\int \varphi^2(t)\,dt + 3X'\int f^2(z)\,dz \\ + \frac{X''}{2}(\Phi + F)^2 + \xi(x)(\Phi + F) + \xi_1(x),\end{aligned}$$

en posant

$$t = x + y, \qquad \Phi(t) = \int \varphi(t)\,dt,$$

$$z = x - y, \qquad F(z) = \int f(z)\,dz,$$

et désignant par ξ et ξ_1 deux fonctions de x introduites comme constantes d'intégration. Cette expression de Y contient x en apparence, mais en est indépendante. Pour établir qu'elle est fonction uniforme de y, j'emploie un mode de raisonnement nouveau, je crois, dans la théorie des fonctions et appelé à bien d'autres usages. Assignant à y une valeur fixe b et faisant décrire *à la variable* x dans son plan tous les chemins fermés qui ont pour origine et pour extrémité un point quelconque $x = a$, je montre que tous ces

---

[1] Cette démonstration, inachevée dans le texte primitif, est l'une des deux que le rapport de l'Académie vise comme insuffisantes.

chemins ramènent finalement la valeur initiale de Y, les diverses fonctions qui interviennent dans le problème étant supposées n'avoir que des points singuliers isolés. Ensuite, grâce à la forme linéaire des arguments $x+y$ et $x-y$ par rapport aux variables indépendantes x et y, je fais voir qu'à tout chemin décrit *par la variable* y dans son plan, partant de b pour y revenir, on peut substituer un chemin convenable décrit par la variable x dans son plan, du point a au point a, tandis que y garde constamment la valeur b. Ainsi se trouve complètement démontrée l'uniformité de la fonction Y et, par suite, de toutes les solutions de l'équation (E).

Ce résultat une fois acquis, je mets en évidence les théorèmes suivants :

I. *Les quatre fonctions* X, Y, φ, f *ne présentent à distance finie d'autres singularités que des pôles doubles à résidu nul.*

II. *Si l'une d'elles admet plus d'un pôle à distance finie, les quatre fonctions sont périodiques; si l'une d'elles admet trois pôles formant un triangle, toutes les quatre sont doublement périodiques ; si l'une d'elles n'a qu'un seul pôle à distance finie, les autres n'en ont pas davantage.*

III. *Si l'une d'elles est doublement périodique, l'élément linéaire rentre dans le type de M. Darboux.*

Pour achever la solution, je résous ce problème beaucoup plus général :

Trouver toutes les fonctions $\mathrm{X}(x)$ *qui sont uniformes et qui deviennent des fonctions uniformes de* ξ *par le changement de variable*

$$d\xi = \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}(x)}}.$$

On voit, en effet, immédiatement que les fonctions X qui vérifient l'équation (E) jouissent de cette double propriété.

En faisant décrire aux variables x et ξ les contours qui conduisent aux différentes déterminations des intégrales inverses

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}(x)}}, \qquad x = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi(\xi)}},$$

on s'assure que X et Ξ sont des fonctions périodiques de leurs arguments. Même après cette première réduction le problème nouveau semble loin d'être résolu, plus encore à cause de la nature en apparence si indéterminée des fonctions X et Ξ que de la multiplicité des cas particuliers correspondant aux hypothèses possibles sur le nombre de leurs périodes effectives (deux, un ou zéro). Mais, par un raisonnement fondé sur la considération des périodes des intégrales ξ et x, et qui convient à tous les cas, je montre qu'*il existe une relation homographique à coefficients constants entre l'une des fonctions* $\wp(\xi)$, $\sin^2\xi$, e^ξ, ξ^2 *ou* ξ *d'une part et l'une des fonctions* $\wp(x)$, $\sin^2 x$, e^x, x^2 *ou* x *d'autre part* (¹). Cette relation détermine dans chaque cas les fonctions $X(x)$ et $\Xi(\xi)$. En lui donnant toutes les formes dont elle est susceptible, on retrouve naturellement *toutes* les expressions de X obtenues dans les Chapitres II et III ainsi que dans le présent, mais *on n'en trouve aucune nouvelle.*

Nous connaissons alors les formes analytiques, parfaitement déterminées, que peut revêtir X; ce sont certaines fonctions rationnelles, soit de $\wp(x)$, soit de e^x, soit de x lui-même, comportant au plus huit constantes arbitraires; ce sont aussi les formes possibles de Y et, d'après la loi de réciprocité, les fonctions φ et f n'en ont pas d'autres. La détermination complète de tous les éléments linéaires doublement harmoniques est ainsi ramenée à une pure question de calcul algébrique : substituer dans l'équation (E) les diverses expressions connues de X, Y, φ, f et déterminer les constantes arbitraires de façon que cette équation soit vérifiée quels que soient x et y. Les résultats précédemment acquis (en particulier les théorèmes I, II et III) et quelques considérations simples de périodicité réduisent considérablement le nombre des essais, et l'on établit en toute rigueur la proposition énoncée au début du Chapitre. *Ainsi se trouve complètement résolu le problème des éléments linéaires doublement harmoniques.*

Le Chapitre V traite des surfaces que M. Lie, dans son Mé-

(¹) Nous négligeons les indéterminées qui pourraient multiplier les deux variables ou s'ajouter à elles. — Cette proposition n'était pas établie rigoureusement dans le texte primitif.

moire déjà cité, a appelées *surfaces de troisième classe*. Nous montrons que ces surfaces sont comprises parmi les surfaces doublement harmoniques, sauf une catégorie assez restreinte, qui peut n'y pas rentrer. La détermination de leurs éléments linéaires est implicitement contenue dans le Chapitre précédent, puisqu'il suffit de particulariser les constantes restées arbitraires dans nos formules pour satisfaire à l'équation du problème, que M. Lie a donnée sans la résoudre.

La *troisième classe* étant loin de comprendre tous les éléments linéaires doublement harmoniques, M. Lie a rencontré parfois de tels éléments linéaires, qu'il particularise aussitôt, pour les faire rentrer dans la troisième classe, mais sans mentionner leur propriété d'être doublement harmoniques. Il nous a suffi de la mettre en évidence sur trois d'entre eux pour arriver à cet énoncé, qui complète la théorie de la représentation géodésique : *Toute surface susceptible d'être représentée sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des deux familles de lignes de longueur nulle et sur d'autres avec conservation de ces deux familles est une surface doublement harmonique.*

Troisième Partie [1]. — L'objet de cette dernière Partie est la *détermination de tous les éléments linéaires harmoniques qui conviennent à des spirales.*

Au début du Chapitre I, j'indique les premières solutions du problème, fournies par le théorème de M. Maurice Lévy : *Tout élément linéaire homogène, de degré autre que* -2, *appartient à une infinité de spirales.* Tel est le cas de celui-ci

$$(m) \qquad ds^2 = (au^m - bv^m)(du^2 + dv^2),$$

qui est visiblement harmonique. En faisant croître ou décroître m indéfiniment, on en déduit ces deux autres

$$(e) \qquad ds^2 = (e^{au} - e^{bv})(du^2 + dv^2),$$

$$(l) \qquad ds^2 = (\log au - \log bv)(du^2 + dv^2),$$

qui conviennent également à des spirales. Ces solutions une fois

---

(1) Publiée dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, année 1895.

signalées, nous posons le problème dans toute sa généralité. Il s'agit de résoudre complètement, dans le cas des spirales, l'équation différentielle indéterminée

$$2X(\omega''_{x^2}+\omega'^2_x) - 2Y(\omega''_{y^2}+\omega'^2_y) + 3X'\omega'_x - 3Y'\omega'_y + X'' - Y'' = 0,$$

qui exprime que l'élément linéaire $e^{\omega}\,dx\,dy$ acquiert la forme harmonique par le changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}}.$$

Comme on a, pour les spirales,

$$\omega = -i(x-y) + \int T(t)\,dt, \qquad t = x+y,$$

il vient

$$(S)\quad \begin{cases} 2X(T'+T^2-2iT-1) - 2Y(T'+T^2+2iT-1) \\ \qquad\qquad + 3X'(T-i) - 3Y'(T+i) + X'' - Y'' = 0. \end{cases}$$

Telle est l'équation qui nous a permis (¹) de déterminer tous les éléments linéaires cherchés et, en outre, de distinguer ceux qui sont doublement harmoniques de ceux qui ne le sont point.

Avant d'en commencer la discussion, je fais voir que *pour les spirales simplement harmoniques les fonctions* X *et* Y *sont nécessairement de la forme*

$$X = A e^{2rx}, \qquad Y = B e^{-2ry},$$

A, B *et* r *étant trois constantes dont la dernière peut être nulle.* C'est pourquoi nous résolvons l'équation (S), d'abord en réduisant X et Y à des constantes, ce qui conduit à l'élément linéaire (e), puis en prenant pour X et Y les exponentielles; il faut alors intégrer une équation de Riccati; mais il est possible d'en trouver une solution et l'on arrive ainsi aux deux éléments linéaires (m) et (l).

Le Chapitre finit par la détermination (²) des éléments linéaires

(¹) L. Raffy, *Sur les spirales harmoniques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 518; 1891).

(²) L. Raffy, *Sur la déformation des surfaces spirales* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIX, p. 65; 1891).

qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution. Ils rentrent tous dans le type

$$ds^2 = (x + y)^m\, dx\, dy,$$

trouvé par M. Lie pour l'élément linéaire des surfaces dont les géodésiques admettent plusieurs transformations infinitésimales conformes.

Au Chapitre II je traite complètement l'équation (S). En effectuant sur elle les transformations générales étudiées tout au début de la seconde Partie, on est conduit à distinguer d'abord les spirales à courbure constante, qui sont forcément des développables, puis les spirales applicables sur les surfaces de révolution ; il n'y a lieu de revenir ni sur les unes ni sur les autres. Ces deux cas particuliers une fois écartés, l'équation (S) permet d'exprimer X' et Y' en fonction linéaire de X et Y, et comme ses coefficients ne dépendent que de T et T', on a

$$(\tau) \qquad X' = T_1 X + T_2 Y, \qquad Y' = T_2 X + T_4 Y,$$

les lettres T_i désignant des fonctions rationnelles de T et de ses quatre premières dérivées. De ces expressions on pourrait déduire X'' et Y'' qui seraient linéaires et homogènes en X et Y. Substituant X', Y', X'' et Y'' dans l'équation (S), on trouverait un résultat de la forme

$$X f_1(t) + Y f_2(t) = 0\ ;$$

en sorte que, si le rapport Y : X n'était pas une fonction de t, c'est-à-dire si l'on ne faisait pas

$$X = A e^{cx}, \qquad Y = B e^{-cv},$$

hypothèse étudiée précédemment, on devrait poser

$$f_1(t) = 0, \qquad f_2(t) = 0.$$

Ce seraient là deux équations différentielles du cinquième ordre pour la fonction T, réductibles, il est vrai, au quatrième, puisque la variable indépendante n'y figurerait pas. Mais telle serait la complication de ces équations que, loin de pouvoir les discuter, on serait presque dans l'impossibilité de les écrire explicitement. C'est pourquoi je procède d'une tout autre façon. Laissant provisoirement de côté la recherche de la fonction T, je considère les fonctions T_i comme des fonctions inconnues, sans relation entre elles, et je démontre que le système (τ) admet deux solutions et deux seulement, savoir :

$$
(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned}
&X = (Ax+\alpha)e^{cx}, && Y = (By+\beta)e^{-cy},\\
&T_1 = \frac{AB}{ABt+A\beta+B\alpha}+c, && T_3 = \frac{B^2 e^{-ct}}{ABt+A\beta+B\alpha},\\
&T_2 = \frac{A^2 e^{ct}}{ABt+A\beta+B\alpha}, && T_4 = \frac{AB}{ABt+A\beta+B\alpha}-c;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned}
&X = le^{2rx}+Ae^{2hx}, && Y = me^{-2ry}+Be^{-2hy},\\
&\Delta T_1 = 2Blre^{(r-h)t}-2Amhe^{-(r-h)t}, && \Delta T_3 = -2Bm(r-h)e^{-(r+h)t},\\
&\Delta T_2 = -2Al(r-h)e^{(r+h)t}, && \Delta T_4 = -2Blhe^{(r-h)t}+2Amre^{-(r-h)t},\\
&\qquad \Delta = Ble^{(r-h)t}-Ame^{-(r-h)t}. &&
\end{aligned}\right.
$$

Dans les deux tableaux, tous les coefficients sont arbitraires, sous la seule restriction $r-h\neq 0$.

Les expressions ainsi obtenues pour X et Y ne sont que les types analytiques dans lesquels il faut chercher les solutions de notre problème. A cet effet, je les substitue dans l'équation (S), qui se décompose en deux autres, équivalentes à celles-ci

$$
(\mathrm{T})\qquad \left\{\begin{aligned}
&[3(T_1+T_2-T_3-T_4)-8i]\,T\\
&\quad +(2r+2h-3i)(T_1+T_2+T_3+T_4)=0.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathfrak{S})\qquad \left\{\begin{aligned}
&4(T'+T^2-2rh-1)+3T(T_1-T_2-T_3+T_4)\\
&\qquad +(2r+2h-3i)(T_1-T_2+T_3-T_4)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Pour les expressions (I) des fonctions T_i qui correspondent à $r=h=c$, ces équations sont incompatibles. Il reste donc à discuter les solutions qui composent le système (II). On reconnaît d'abord que l'équation (T) peut se réduire à une identité, et l'on trouve ainsi un élément linéaire

$$
(1)\qquad ds^2 = e^{-i(x-y)}\,e^{-3i\frac{x+y}{4}}\cos\frac{x+y}{4}\,dx\,dy,
$$

qui rentre dans le type (e) tout en admettant une infinité d'autres formes harmoniques.

Nous tirons ensuite de l'équation (T) l'expression de T pour la porter dans l'équation $(\mathfrak{S})$. Le résultat de cette substitution est naturellement compliqué. On le simplifie par la mise en évidence du facteur Δ commun à tous ses termes ; mais il reste encore une fonction linéaire de huit exponentielles

$$e^{\pm rt},\quad e^{\pm ht},\quad e^{\pm(r-h)t},\quad e^{\pm(r+h)t},$$

qu'il faut rendre identiquement nulle en déterminant convenablement les arbitraires A, B, l, m, r, h. La discussion du système d'équations algébriques auxquelles on est conduit comporte l'examen de cas assez nombreux, qui se rangent sous trois hypothèses principales :

1° Tous les exposants sont différents de zéro et différents les uns des autres ;

2° Tous les exposants sont différents de zéro, mais certains d'entre eux sont égaux ;

3° Certains exposants sont nuls.

La première hypothèse ne donne rien ; la troisième ne donne que des développables. La deuxième conduit à trois éléments linéaires

$$(2)\qquad ds^2 = e^{-i(x-y)}\left(e^{i\frac{x+y}{5}} + e^{-3i\frac{x+y}{5}}\right) dx\,dy,$$

$$(3)\qquad ds^2 = e^{-i(x-y)}\left(\cos\frac{x+y}{2} + \frac{5}{3}\right) dx\,dy,$$

$$(4)\qquad ds^2 = e^{-i(x-y)}\cos\frac{x+y}{3}\,dx\,dy,$$

qui rentrent dans le type (m) tout en admettant une infinité de formes harmoniques. Le dernier est le seul qui convienne à des spirales doublement harmoniques et à des surfaces de révolution. Finalement, je conclus que *tous les éléments linéaires cherchés rentrent dans l'un des trois types* (m), (e), (l) *et que les seuls qui soient doublement harmoniques sont les éléments linéaires* (1), (2), (3) *et* (4).

Le Mémoire se termine sur ce résultat. Je n'y aborde point la recherche des spirales qui admettent les éléments linéaires trouvés. Je renverrai à une Note que j'avais publiée antérieurement *Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire*. (Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1421 ; 1891)