L. RAFFY

Sur les géodésiques spéciales des surfaces harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 8-19
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__8_1>

SUR LES GÉODÉSIQUES SPÉCIALES DES SURFACES HARMONIQUES;

Par M. L. Raffy.

1. On sait que, si l'élément linéaire d'une surface est réductible à la forme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

les lignes géodésiques de cette surface ont pour équation finie

$$\int \frac{du}{\sqrt{U - a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{a - V}} = b.$$

Si l'on établit une dépendance quelconque entre les deux constantes arbitraires a et b, on obtient une famille de géodésiques. Mais on peut aussi attribuer à l'une de ces constantes une valeur numérique. Il y a lieu de considérer, en particulier, les familles de géodésiques qui s'obtiennent en prenant pour a une valeur numérique a_0 et laissant varier b. Nous leur donnerons, pour abréger le langage, le nom de *géodésiques spéciales*.

Il existe entre les géodésiques spéciales et la forme de l'intégrale quadratique une relation que voici :

Étant donnée une surface harmonique d'élément linéaire

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2), \tag{1}$$

si on la rapporte à une famille de géodésiques spéciales $\theta_1 =$ *const. et à leurs trajectoires orthogonales* $\theta =$ *const., en sorte qu'il vient*

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma\, d\theta_1^2, \tag{2}$$

l'équation aux géodésiques relative aux variables θ *et* θ_1

$$p^2 + \frac{q^2}{\sigma} = 1$$

admet une intégrale quadratique dont le terme en p^2 *est affecté d'un coefficient constant et peut, par suite, être supposé nul.*

Réciproquement, si pour l'élément linéaire (2), *l'équation aux géodésiques*

$$p^2 + \frac{q^2}{\sigma} = 1$$

admet une intégrale quadratique dont le terme en p^2 *a un coefficient constant, les géodésiques* $\theta_1 = const.$ *sont des géodésiques spéciales, c'est-à-dire qu'après le changement de variables qui ramène l'élément linéaire* (2) *à la forme* (1), *ces géodésiques sont représentées par l'équation*

$$\frac{du}{\sqrt{U - a}} - \frac{dv}{\sqrt{a - V}} = 0,$$

où a *est une constante numérique.*

2. On sait en effet que, pour l'élément linéaire (1), l'intégrale quadratique du problème des géodésiques est

$$\text{(3)} \qquad I = \frac{V}{U - V}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial u}\right)^2 + \frac{U}{U - V}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial v}\right)^2 = \text{const.}$$

On sait aussi que l'élément linéaire (1) peut s'écrire

$$ds^2 = (\sqrt{U - a}\, du + \sqrt{a - V}\, dv)^2 + (U - a)(a - V)\left(\frac{du}{\sqrt{U - a}} - \frac{dv}{\sqrt{a - V}}\right)^2,$$

de sorte que, pour rapporter la surface à une famille de géodésiques spéciales $\theta_1 = \text{const.}$ et à leurs trajectoires orthogonales $\theta = \text{const.}$, on fera le changement de variables

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} d\theta = \sqrt{U - a}\, du + \sqrt{a - V}\, dv, \\ d\theta_1 = \dfrac{du}{\sqrt{U - a}} - \dfrac{dv}{\sqrt{a - V}}. \end{cases}$$

Voyons ce que devient l'intégrale I quand on l'exprime en θ

et θ_1. L'identité générale

$$d\varpi = \frac{\partial\varpi}{\partial\theta}\left(\sqrt{U-a}\,du + \sqrt{a-V}\,dv\right) + \frac{\partial\varpi}{\partial\theta_1}\left(\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}}\right),$$

où nous posons

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\theta} = p, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial\theta_1} = q,$$

donne immédiatement

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u} = p\sqrt{U-a} + \frac{q}{\sqrt{U-a}},$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial v} = p\sqrt{a-V} - \frac{q}{\sqrt{a-V}}.$$

Il suffit de porter ces expressions dans l'intégrale (3) pour voir que le coefficient de p^2 se réduit à la constante a. On peut donc, en retranchant de cette intégrale l'équation aux géodésiques

$$p^2 + \frac{q^2}{\sigma} = 1,$$

multipliée par a, obtenir une nouvelle intégrale quadratique dépourvue de terme en p^2, ce qui prouve la première partie de notre énoncé.

3. Pour établir la réciproque, nous allons déterminer le changement de variables

$$(5) \qquad \begin{cases} d\theta = M\,du + N\,dv, \\ d\theta_1 = M_1\,du + N_1\,dv, \end{cases}$$

par lequel on passe, dans l'hypothèse actuelle, de l'élément linéaire (2) à l'élément linéaire (1).

L'identité

$$(U = V)(du^2 + dv^2) - (M\,du + N\,dv)^2 + \sigma(M_1\,du + N_1\,dv)^2$$

entraîne les trois relations

$$M^2 + \sigma M_1^2 = U - V, \qquad MN + \sigma M_1 N_1 = 0, \qquad N^2 + \sigma N_1^2 = U - V,$$

entre lesquelles on élimine aisément M_1 et N_1. On trouve ainsi

$$(6) \qquad U - V = M^2 + N^2.$$

Mais, par hypothèse, le coefficient de p^2 dans l'intégrale quadratique I exprimée en θ et θ_1 se réduit à une constante. Or les formules (5) donnent, pour la fonction ϖ,

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u} = \mathrm{M}p + \mathrm{M}_1 q, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial v} = \mathrm{N}p + \mathrm{N}_1 q.$$

D'après cela, si nous calculons le coefficient de p^2 dans l'intégrale (3), en l'égalant à une constante a, nous trouverons

$$\frac{\mathrm{VM}^2 + \mathrm{UN}^2}{\mathrm{U} - \mathrm{V}} = a,$$

ce qui peut s'écrire

$$-\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{N}^2 - a} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{M}^2 + a} = \frac{1}{h},$$

en désignant par h une indéterminée. Ces deux relations donnent

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{U}h - a, \qquad \mathrm{N}^2 = a - \mathrm{V}h;$$

la substitution de ces valeurs dans la condition (6) montre que h est égal à l'unité. On a donc

$$\mathrm{M} = \sqrt{\mathrm{U} - a}, \qquad \mathrm{N} = \sqrt{a - \mathrm{V}},$$

et, par suite,

$$d\theta = \sqrt{\mathrm{U} - a}\, du + \sqrt{a - \mathrm{V}}\, dv.$$

Dès lors la différence $ds^2 - d\theta^2$, qui n'est autre que $\sigma\, d\theta_1^2$, se réduisant à

$$(\mathrm{U} - a)(a - \mathrm{V})\left(\frac{du}{\sqrt{\mathrm{U} - a}} - \frac{dv}{\sqrt{a - \mathrm{V}}}\right)^2$$

en vertu de l'identité rappelée au début, l'équation $d\theta_1 = 0$ revient à

$$\frac{du}{\sqrt{\mathrm{U} - a}} - \frac{dv}{\sqrt{a - \mathrm{V}}} = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

4. Supposons maintenant qu'un élément linéaire de surface harmonique soit donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}(u, v)\, dv^2,$$

et cherchons sous quelles conditions les géodésiques $v = \text{const.}$ seront des géodésiques spéciales.

Nous devons exprimer que l'équation aux géodésiques

$$\Delta \equiv p^2 + \frac{q^2}{G} = 1$$

admet une intégrale quadratique dépourvue de terme en p^2

$$I \equiv 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

Écrivons, à cet effet, que le crochet

$$[\Delta, I] \equiv \frac{\partial\Delta}{\partial u}\frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial\Delta}{\partial p}\frac{\partial I}{\partial u} + \frac{\partial\Delta}{\partial v}\frac{\partial I}{\partial q} - \frac{\partial\Delta}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial v}$$

est nul quels que soient p et q. L'identité ainsi obtenue

$$q^3(BG'_u + CG'_v + GC'_v) + pq^2(BG'_v + 2GB'_v + G^2C'_u) + 2qp^2G^2B'_u = 0$$

donne lieu aux trois équations

$$BG'_u + CG'_v + GC'_v = 0,$$
$$BG'_v + 2GB'_v + G^2C'_u = 0,$$
$$B'_u = 0.$$

Ainsi B est une fonction de v seulement, d'où cette conclusion :

Un élément linéaire étant donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2,$$

pour qu'il convienne à des surfaces harmoniques et qu'en outre les courbes $v = const.$ soient des géodésiques spéciales, il faut et il suffit qu'il existe une fonction B *de la seule variable* v *et une fonction* C *de* u *et de* v *qui vérifient les deux équations*

$$BG'_u + CG'_v + GC'_v = 0, \tag{7}$$
$$BG'_v + 2GB' + G^2C'_u = 0 \tag{8}$$

où B' *désigne la dérivée de* B.

5. Nous allons appliquer cette règle à l'élément linéaire des surfaces qui présentent une famille de courbes parallèles dont la courbure géodésique en chaque point est fonction de la courbure totale. Si l'on rapporte ces surfaces aux courbes considérées ($u = \text{const.}$) et aux géodésiques orthogonales ($v = \text{const.}$), leur élément linéaire prend la forme ci-dessus. La courbure géodé-

sique ω des courbes $u = \text{const.}$ et la courbure totale $(R_1 R_2)^{-1}$ de la surface ont respectivement pour valeurs

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Nous exprimerons donc notre hypothèse en écrivant que la combinaison

$$-\frac{1}{R_1 R_2} - \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 = -\frac{\partial \omega}{\partial u}$$

est une fonction de ω, ce qui revient à

$$\psi'(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial u} = 1.$$

L'intégration introduit une fonction arbitraire V de v et donne

$$\psi(\omega) = u + V.$$

On conclut de là que ω est une fonction de $u + V$, et si l'on pose

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u+V)}} \frac{\partial \sqrt{\varphi(u+V)}}{\partial u},$$

on trouve immédiatement

$$G(u, v) = \varphi(u + V),$$

en réduisant à l'unité, comme il est permis, la fonction de v qui devrait multiplier le second membre. Nous obtenons ainsi l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u + V)\, dv^2,$$

qui convient en particulier à toutes les surfaces de révolution quand la dérivée de V se réduit à une constante.

6. Pour simplifier la discussion des équations (7) et (8) qui expriment la propriété des géodésiques spéciales, nous supposerons que la fonction B se réduit à une constante, ce qui permet de faire $B = 1$. Alors ces équations deviennent

$$\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial (CG)}{\partial v} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{G} = 0. \tag{10}$$

Introduisons l'hypothèse

$$G = \varphi(u + V).$$

L'équation (10) s'écrira

$$\frac{\partial C}{\partial u} - V' \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\varphi} = 0.$$

Intégrant et désignant par W une fonction inconnue de v, on a

$$C = \frac{V'}{\varphi} + W, \tag{10'}$$

d'où, par substitution dans l'équation (9),

$$(WV' + 1)\varphi' + W'\varphi + V'' = 0. \tag{9'}$$

Avant d'aller plus loin, indiquons que la supposition $V' = 0$ conduirait à l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{au}\, dv^2$$

des surfaces à courbure totale constante.

Ce cas particulier mentionné, différentions l'équation (9)′ par rapport à u, nous aurons

$$(WV' + 1)\varphi'' + W'\varphi' = 0. \tag{11}$$

Supposons d'abord $WV' + 1 = 0$, ce qui exige soit $\varphi' = 0$, soit $W' = 0$. La solution $\varphi = \text{const.}$ correspond aux surfaces développables. Si W est constant, il en est de même de V'; on a

$$W = \frac{1}{a}, \qquad V' = -a, \qquad V'' = 0.$$

L'équation (9)′ est une identité. La fonction φ reste arbitraire et l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u - av)\, dv^2$$

convient à toutes les surfaces de révolution.

Nous supposerons désormais le produit $(WV' + 1)\varphi'$ différent de zéro. Alors l'équation (11) donne

$$(11)' \qquad \frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{W'}{WV'+1} = \text{const.} = m;$$

d'où deux cas à distinguer suivant que m est nul ou différent de zéro.

7. *Premier cas :* $m = 0$. La fonction W se réduit à une constante, la fonction φ est linéaire et l'on peut prendre

$$\varphi = n(u + V), \qquad n = \text{const.}$$

L'équation $(9)'$ devient

$$n(WV'+1) + V'' = 0$$

ou, en intégrant,

$$(9)'' \qquad V' + nWV + nv = 0.$$

Si la constante W est nulle, une nouvelle intégration donne

$$V = -n\frac{v^2}{2};$$

d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + n\left(u - n\frac{v^2}{2}\right)dv^2,$$

que l'on peut mettre sous la forme plus simple

$$(\mathrm{I}) \qquad ds^2 = du^2 + 2(u - v^2)\,dv^2,$$

en multipliant u et v par des constantes convenables.

Si la constante W n'est pas nulle, l'intégration de l'équation $(9)''$ donne

$$V = pe^{-nWv} - \frac{v}{W} + \frac{1}{nW^2},$$

avec une nouvelle arbitraire p. Alors l'élément linéaire peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + n\left(u - \frac{v}{W} + pe^{-nWv}\right)dv^2.$$

On le réduit à la forme plus simple

$$(\mathrm{II}) \qquad ds^2 = du^2 + 2\left(u + av + be^{\frac{2v}{a}}\right)dv^2,$$

où n'entrent plus que deux arbitraires a et b, en multipliant u et v par des constantes convenables. On peut même, quand b n'est pas nul, le réduire à l'unité en profitant des constantes qui s'ajoutent à u et à v.

Remarque. — Les éléments (I) et (II) se présentent dans la recherche des surfaces réglées harmoniques quand on considère celles de ces surfaces qui admettent une génératrice tangente au cercle de l'infini. J'ai démontré, en effet ([1]), que leur élément linéaire est réductible soit à la forme (I), soit à la forme (II), qui conviennent l'une et l'autre à des paraboloïdes imaginaires, sauf pour $b = 0$, cas où le paraboloïde est de révolution. Ce sont là les seules quadriques dont on connaisse *toutes* les déformations, découvertes successivement par M. Weingarten, celles du paraboloïde de révolution d'abord ([2]), puis celles ([3]) du paraboloïde (I), enfin celles ([4]) du paraboloïde (II).

8. *Second cas : $m \neq 0$.* Nous poserons, pour abréger, $t = u + V$. Les deux relations $(11)'$ donnent

$$W' = -m(WV' + 1) \tag{12}$$

$$\varphi = \alpha e^{mt} - \beta, \tag{13}$$

en désignant par α et β deux constantes arbitraires. Substituant cette expression de φ dans l'équation $(9)'$ et tenant compte de l'équation (12) nous avons, pour déterminer V et W, le système

$$V'' + m\beta(WV' + 1) = 0, \tag*{(11)''}$$

$$W' + m\ (WV' + 1) = 0. \tag{12}$$

L'hypothèse $\beta = 0$ donne $V'' = 0$, d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{m(u-av)}dv^2,$$

qui correspond à des surfaces à courbure totale constante.

([1]) *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 223; 1890).

([2]) *Journal de Crelle,* t. LIX, p. 382; 1861.

([3]) *Göttinger Nachrichten;* 1887.

([4]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXII, p. 706; 1891.

Soit donc désormais $\beta \neq 0$. Le système ci-dessus entraîne

$$V'' - \beta W' = 0$$

ou bien, en appelant $-2q\gamma$ une constante d'intégration,

$$V' = \beta(W - 2\gamma). \tag{14}$$

Substituons cette expression de V' dans l'équation (12); nous aurons

$$\frac{W'}{(W - r)^2 + n^2} = -m\beta, \qquad n^2 = \frac{1}{\beta} - \gamma^2. \tag{15}$$

Il faut distinguer, suivant que n est nul ou différent de zéro.

1° Soit $n = 0$. L'équation (15) s'écrit

$$\frac{-W'}{(W - r)^2} = \frac{m}{\gamma^2};$$

on en déduit

$$\frac{1}{W - \gamma} = \frac{mv}{\gamma^2}.$$

La relation (14) donne alors

$$V = \frac{1}{m} \log v - \frac{v}{\gamma},$$

et la formule (13) devient

$$\varphi = \alpha v e^{m\left(u - \frac{v}{\gamma}\right)} - \frac{1}{\gamma^2}.$$

Nous avons négligé deux constantes additives sans importance. L'élément linéaire auquel nous arrivons peut être simplifié et mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + (ve^{u+v} - 1)\, dv^2. \tag{III}$$

L'intégrale quadratique correspondante est

$$I \equiv 2pq + \left[\frac{(v + 1)e^{u+v}}{ve^{u+v} - 1} - 2\right] q^2 = \text{const.}$$

2° Soit maintenant $n \neq 0$. De l'équation (15) on tire

$$W - \gamma = -n \operatorname{tang} mn\beta v.$$

La relation (14) donne alors

$$V = -\beta\gamma v + \frac{1}{m}\log\cos mn\beta v,$$

et la formule (13) devient

$$\varphi = \alpha\cos mn\beta v e^{m(u-\beta\gamma v)} - \beta.$$

L'élément linéaire cherché est donc

$$ds^2 = du^2 + [\alpha\cos mn\beta v e^{m(u-\beta\gamma v)} - \beta]\,dv^2.$$

Si γ est nul, on peut le ramener à la forme plus simple

$$\text{(IV)} \qquad ds^2 = du^2 + (e^u\cos v - 1)\,dv^2,$$

et l'intégrale quadratique correspondante est

$$I \equiv 2pq - \frac{e^u\sin v}{e^u\cos v - 1}q^2 = \text{const.}$$

Si γ n'est pas nul, il subsiste une constante arbitraire dans l'expression définitive de l'élément linéaire

$$\text{(V)} \qquad ds^2 = du^2 + (e^{u+v}\cos av - a^2 - 1)\,dv^2, \qquad a(a^2+1) \neq 0,$$

et l'intégrale quadratique correspondante est

$$I \equiv 2pq + \frac{q^2}{a^2+1}\left[\frac{e^{u+v}(\cos av - a\sin av)}{e^{u+v}\cos av - a^2 - 1} - 2\right] = \text{const.}$$

On sait que la connaissance de l'intégrale quadratique fournit le changement de variables propre à ramener l'élément linéaire à la forme harmonique.

9. Nous terminerons par une observation relative aux enveloppes des familles de géodésiques spéciales. Si l'élément linéaire est donné sous la forme

$$du^2 = (U - V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2),$$

chaque famille de géodésiques spéciales sera représentée par l'équation différentielle

$$\frac{U_1\,du}{\sqrt{U-a}} + \frac{V_1\,dv}{\sqrt{a-V}} = 0,$$

où la lettre a représente un nombre déterminé, variable d'une famille à l'autre.

D'après cette équation, on pourrait être tenté de croire que toutes les courbes d'une famille sont tangentes aux lignes de la surface représentées par l'une ou l'autre des équations

$$\mathrm{U} - a = 0, \qquad \mathrm{V} - a = 0.$$

Car si u_0, par exemple, est une racine de la première, pour $u = u_0$ l'équation différentielle donne *en général* $du = 0$, en sorte que les géodésiques de la famille seront tangentes à la courbe de paramètre u_0. Mais il importe de remarquer que si u_0 annule la fonction U_1 et fait acquérir une valeur finie au rapport $\mathrm{U}_1 : \sqrt{\mathrm{U} - a}$, on n'est plus en droit d'affirmer que du soit nul. Les géodésiques de la famille spéciale peuvent n'avoir pas d'enveloppe. C'est précisément ce qui a lieu pour les surfaces du second degré. Leur élément linéaire étant mis (en coordonnées elliptiques ou paraboliques) sous la forme

$$ds^2 = (u - v)(\mathrm{U}_1^2\, du^2 + \mathrm{V}_1^2\, dv^2),$$

où U_1 et V_1 ont des expressions bien connues, c'est en faisant $a = 0$ dans l'équation

$$\frac{\mathrm{U}_1\, du}{\sqrt{u - a}} + \frac{\mathrm{V}_1\, dv}{\sqrt{a - v}} = 0$$

qu'on obtient les génératrices rectilignes, qui sont des géodésiques sans enveloppe. Les coefficients de du et de dv restent finis quand on fait soit $u = 0$, soit $v = 0$.