BULLETIN DE LA S. M. F.

BALITRAND

Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 97-102

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__97_0>

DÉMONSTRATION DES FORMULES FONDAMENTALES DE LA PÉRIMORPHIE ET DES FORMULES DE CODAZZI;

Par M. Balitrand.

Les formules que nous allons établir ne diffèrent pas, au fond, de celles qui ont été données par Ribaucour ([1]), et qui constituent la base de la méthode à laquelle il a donné le nom de *périmorphie*. Mais la démonstration de nos formules est plus simple, et la signification géométrique des éléments qui y figurent plus évidente. Elles conduisent immédiatement, et sous une forme très avantageuse, aux formules de Codazzi.

Étant donnés une courbe gauche (c) et un point M sur cette courbe, menons au point M le trièdre formé par la tangente Mx, la normale principale My et la binormale Mz, ou trièdre principal. On passe de la position $Mxyz$ à une position infiniment voisine par une translation ds et par une rotation dont les composantes sont $-\frac{ds}{r}$, o, $\frac{ds}{\rho}$, ρ et r désignant les rayons de courbure et de torsion de la courbe (c) au point M. Si x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace par rapport au trièdre principal, on a les formules ([2])

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= dx + \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) ds, \\ \delta y &= dy + \left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r}\right) ds, \\ \delta z &= dz - \frac{y}{r}\, ds, \end{aligned} \right.$$

la caractéristique δ se rapportant au déplacement absolu du point P, la caractéristique d au déplacement relatif.

([1]) *Étude sur les élassoïdes* (Mémoires couronnés, publiés par l'Académie des Sciences de Belgique; 1881). — (*Journal de Mathématiques pures et appliquées;* 1891).

([2]) Ces formules sont très connues. M. Cesaro en a fait un emploi systématique dans l'étude intrinsèque des courbes gauches et les a étendues à l'hyperespace (*Annali di Matematica;* 1887. — *Rendiconti, della R. Accademia dei Lincei;* 1889). — *Voir* aussi le travail de M. Rouquet, *Sur les formules fondamentales de la théorie des courbes gauches* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*).

Si, au lieu du trièdre principal, on considère le trièdre formé par la tangente Mx et par deux droites My, Mz, situées dans le plan normal, la droite My étant inclinée d'un angle θ sur la binormale, on a les formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= dx + ds + \frac{1}{\rho}(z\sin\theta - y\cos\theta)\,ds,\\ \delta y &= dy + \frac{x\cos\theta}{\rho}\,ds - z\left(\theta' - \frac{1}{r}\right)ds,\\ \delta z &= dz + y\left(\theta' - \frac{1}{r}\right)ds - \frac{x\sin\theta}{\rho}\,ds.\end{aligned}\right.$$

Passons aux éléments du second ordre. Les formules (1) donnent aisément

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta^2 x &= d^2x + d^2s - y\,d\frac{ds}{\rho} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r}\right)ds^2 - 2\frac{dy\,ds}{\rho},\\ \delta^2 y &= d^2y + x\,d\frac{ds}{\rho} + z\,d\frac{ds}{r} - y\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)ds^2 + 2\frac{dx\,ds}{\rho} + 2\frac{dz\,ds}{r},\\ \delta^2 z &= d^2z - y\,d\frac{ds}{r} - \frac{1}{r}\left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r}\right)ds^2 - \frac{2\,dy\,ds}{r},\end{aligned}\right.$$

et les formules (2) les suivantes :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta^2 x &= d^2x + d^2s + z\,d\frac{\sin\theta\,ds}{\rho} - y\,d\frac{\cos\theta\,ds}{\rho}\\ &\quad + \left(\theta' - \frac{1}{r}\right)H - K^2x + \frac{2\,ds}{\rho}(\sin\theta\,dz - \cos\theta\,dy,\\ \delta^2 y &= d^2y + x\,d\frac{\cos\theta\,ds}{\rho} - z\,d\left(\theta' - \frac{1}{r}\right)ds\\ &\quad + \frac{\sin\theta}{\rho}H - K^2y + \frac{2\,dx\,ds\cos\theta}{\rho} - 2\left(\theta' - \frac{1}{r}\right)dz\,ds,\\ \delta^2 z &= d^2z + y\,d\left(\theta' - \frac{1}{r}\right)ds + x\,d\frac{\sin\theta\,ds}{\rho}\\ &\quad + \frac{\cos\theta}{\rho}H - K^2z + 2\left(\theta' - \frac{1}{r}\right)dy\,ds - \frac{2\,dx\,ds\sin\theta}{\rho},\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} H &= x\left(\theta' - \frac{1}{r}\right)ds^2 + \frac{1}{\rho}(y\sin\theta + z\cos\theta)\,ds^2,\\ K^2 &= \frac{ds^2}{\rho^2} + \left(\theta' - \frac{1}{r}\right)^2 ds^2.\end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant une surface de référence (s) qui, rapportée à deux systèmes de courbes orthogonales, admet pour élément linéaire

$$ds^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2.$$

Considérons le trièdre principal formé par la normale à la surface Oz et par les tangentes Ox et Oy aux courbes (u) et (v), et soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace par rapport à ce trièdre. Lorsqu'on passe de la position $Oxyz$ à une position infiniment voisine $O'x'y'z'$, on a les formules

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta x &= dx + g\,dv + \frac{1}{\rho_1}(z\sin\theta_1 - y\cos\theta_1)\,g\,dv + \left[z\left(\theta' - \frac{1}{r}\right) - \frac{y\cos\theta}{\rho}\right] f\,du,\\
\delta y &= dy + f\,du + \left[\frac{x\cos\theta_1}{\rho_1} - z\left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1}\right)\right] g\,dv + \frac{1}{\rho}(z\sin\theta - y\cos\theta)\,f\,du,\\
\delta z &= dz \qquad\quad + \left[y\left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{x\sin\theta_1}{\rho_1}\right] g\,dv + \left[\frac{y\sin\theta}{\rho} - x\left(\theta' - \frac{1}{r}\right)\right] f\,du.
\end{aligned}\right.$$

On les obtient en appliquant les formules (2) à deux déplacements successifs effectués suivant (u) et (v); ρ_1 et r_1 désignent les rayons de courbure et de torsion de la courbe (u), θ_1 l'angle de son plan osculateur avec le plan tangent à la surface; ρ, r, θ ont la même signification pour la courbe (v).

Nous poserons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \frac{g\cos\theta_1}{\rho_1}, & \mathrm{P} &= \frac{g\sin\theta_1}{\rho_1}, & \mathrm{R} &= g\left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1}\right),\\
\mathrm{N} &= \frac{f\cos\theta}{\rho}, & \mathrm{Q} &= \frac{f\sin\theta}{\rho}, & \mathrm{S} &= f\left(\theta' - \frac{1}{r}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les six quantités M, N, P, Q, R, S ont une signification géométrique bien connue, et les formules (6) s'écrivent alors

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta x &= dx + g\,dv + z(\mathrm{P}\,dv + \mathrm{S}\,du) - y(\mathrm{M}\,dv + \mathrm{N}\,du),\\
\delta y &= dy + f\,du + x(\mathrm{M}\,dv + \mathrm{N}\,du) - z(\mathrm{R}\,dv + \mathrm{Q}\,du),\\
\delta z &= dz \qquad\qquad + y(\mathrm{R}\,dv + \mathrm{Q}\,du) - x(\mathrm{L}\,dv + \mathrm{S}\,du).
\end{aligned}\right.$$

Les conditions de fixité du point x, y, z dans l'espace sont données par les six relations

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{S}z - \mathrm{N}y = 0, & &\frac{\partial x}{\partial v} + g + \mathrm{P}z - \mathrm{M}y = 0,\\
&\frac{\partial y}{\partial u} + f + \mathrm{N}x - \mathrm{Q}z = 0, & &\frac{\partial y}{\partial v} + \mathrm{M}x - \mathrm{R}z = 0,\\
&\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{Q}y - \mathrm{S}x = 0, & &\frac{\partial z}{\partial v} + \mathrm{R}y - \mathrm{P}x = 0,
\end{aligned}\right.$$

et celles de la direction l, m, n par les relations

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial u} + \mathrm{S}n - \mathrm{N}m = 0, & \dfrac{\partial l}{\partial v} + \mathrm{P}n - \mathrm{M}m = 0, \\ \dfrac{\partial m}{\partial u} + \mathrm{N}l - \mathrm{Q}n = 0, & \dfrac{\partial m}{\partial v} + \mathrm{M}l - \mathrm{R}n = 0, \\ \dfrac{\partial n}{\partial u} + \mathrm{Q}m - \mathrm{S}l = 0, & \dfrac{\partial n}{\partial v} + \mathrm{R}m - \mathrm{P}l = 0. \end{cases}$$

Pour exprimer les conditions d'invariabilité d'une droite, il faut joindre aux conditions d'invariabilité de sa direction celles de la fixité d'un de ses points. Si la droite

$$\frac{\mathrm{X}-x}{l} = \frac{\mathrm{Y}-y}{m} = \frac{\mathrm{Z}-z}{n}$$

est donnée par ses six coordonnées

$$l,\ m,\ n,\qquad l' = ny - mz,\qquad m' = lz - nx,\qquad n' = mx - ly,$$

il faut joindre aux relations (10) les relations qui expriment la fixité du vecteur l', m', n'.

Le plan

$$lx + my + nz - p = 0$$

sera fixe dans l'espace, si aux conditions (10) on ajoute les relations

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -mf,\qquad \frac{\partial p}{\partial v} = -lg.$$

Exprimons que les dérivées de l, m, n fournies par les relations (10) satisfont aux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v},\qquad \ldots;$$

on obtient ainsi les relations

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial v} + \mathrm{PQ} - \mathrm{RS} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial v} + \mathrm{RN} - \mathrm{QM} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{d v} + \mathrm{SM} - \mathrm{PN} = 0. \end{cases}$$

Opérant de même sur les dérivées de x, y, z tirées des équations (9) et tenant compte de (11), on trouve

$$(12)\qquad M = -\frac{1}{f}\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad N = \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad Rf + Sg = 0.$$

Ce sont les formules de Codazzi [1].

Pour faire une application des formules précédentes, prenons la représentation sphérique de la surface de référence.

Par un point fixe O de l'espace, menons une parallèle à la normale à la surface au point M, parallèle sur laquelle nous prenons une longueur constante $OP = a$. Les formules (8) nous donnent pour les coordonnées x, y, z du point P

$$\delta x = a(P\,dv + S\,du), \qquad \delta y = -a(R\,dv + Q\,du), \qquad \delta z = 0;$$

d'où, pour l'élément linéaire de la représentation sphérique,

$$(13)\qquad d\sigma^2 = a^2(P\,dv + S\,du)^2 + a^2(R\,dv + Q\,du)^2.$$

Le système orthogonal de la surface de référence admettra, comme représentation sphérique, un système orthogonal si $R = 0$, $S = 0$, ce qui donne les lignes de courbure; ou bien si $P = 0$, $Q = 0$, ce qui donne les surfaces minima; et il est bien évident que ce sont les seuls cas où cela puisse avoir lieu.

Si les lignes (u) et (v) sont les lignes de courbure de la surface (S), l'expression (13) devient

$$d\sigma^2 = a^2\left(\frac{g^2\,dv^2}{R_1^2} + \frac{f^2\,du^2}{R^2}\right) = a^2\,ds^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R^2}\right),$$

α désignant l'angle que fait la courbe considérée avec la courbe (u). On voit que la ligne définie par la relation

$$\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R^2} = \frac{1}{a^2}$$

---

(1) Codazzi, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*; 1882.

O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*; 1867).

Sur les formules fondamentales de la périmorphie on peut consulter, outre les Mémoires de Ribaucour, les *Leçons sur la théorie des surfaces*, de M. Darboux, et le Tome VII du *Traité d'Analyse* de M. Laurent.

est égale en arc à sa représentation sphérique. On voit encore que la représentation sphérique d'une surface minima réalise un tracé géographique de la surface sur la sphère.

L'angle V d'une courbe avec sa représentation sphérique est donné par la formule

$$\operatorname{tang} V = \pm \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) fg\, du\, dv}{\frac{f^2\, du^2}{R} + \frac{g^2\, dv^2}{R_1}}.$$

Cette relation, nouvelle croyons-nous, montre que, par chaque point d'une surface, passent quatre lignes faisant un angle donné avec leur représentation sphérique. Ces quatre lignes sont toutes réelles ou toutes imaginaires. Il n'y a d'exception que si

$$\frac{f^2\, du^2}{R} + \frac{g^2\, dv^2}{R_1} = 0,$$

ce qui correspond aux lignes asymptotiques; et l'on voit que la représentation sphérique d'une ligne asymptotique est perpendiculaire à cette ligne, propriété bien connue.