BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Sur certaines équations qu'on intègre en les différentiant

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 50-61
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__50_0>

SUR CERTAINES ÉQUATIONS QU'ON INTÈGRE EN LES DIFFÉRENTIANT;

Par M. L. Raffy.

1. Étant donnée une équation du premier ordre

$$y = \varphi(x,p), \tag{1}$$

son intégration revient, comme on sait, à celle de l'équation dérivée

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{2}$$

Si l'on connaît, en effet, l'intégrale générale

$$F(x,p,C) = 0 \tag{3}$$

de cette dernière, il suffit, pour avoir celle de l'équation (1), d'éliminer p entre les équations (1) et (3). On a pu ainsi intégrer les équations dites de Lagrange

$$y = xf(p) + \psi(p),$$

dont un cas particulier est l'équation de Clairaut où $f(p) = p$.

Euler [1] a cherché quelle doit être la fonction $\varphi(x,p)$ pour que l'équation dérivée (2) soit d'une forme qui permette de l'intégrer, en particulier pour qu'elle soit homogène ou linéaire. Mais ses solutions, plus intuitives que raisonnées, sont loin d'être complètes. Voici, par exemple, le raisonnement qu'il a dû esquisser à propos de l'équation (2) supposée linéaire, mais qu'il supprime.

Si l'équation (2) est linéaire, son intégrale générale est de la forme

$$x = CP'(p) + \varpi'(p). \tag{3$'$}$$

On aura donc

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp,$$

[1] *Institutiones Calculi integralis*, t. I, Sect. III, nos 695 à la fin.

ou bien

$$y = p(\mathrm{CP}' + \varpi') - (\mathrm{CP} + \varpi),$$

ou, en tirant C de l'intégrale $(3)'$,

$$y = x\left(p - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}\right) + \frac{\mathrm{P}\varpi' - \varpi\mathrm{P}'}{\mathrm{P}'}.$$

Il semble d'après cela, comme l'affirme Euler, que l'équation de départ doive définir y comme fonction linéaire de x à coefficients arbitraires en p; en d'autres termes, que ce soit une équation de Lagrange.

Cette conclusion implique essentiellement que l'équation (2) n'ait pas d'autres solutions que celles que fournit la formule $(3)'$, et, comme une équation linéaire n'a pas de solutions singulières, cela revient à supposer que l'équation (2) ne se décompose pas en deux autres dont l'une serait une équation linéaire. Or, soit l'équation

$$(1)' \qquad y = px + x^2\psi(p).$$

En la différentiant, on trouve

$$x\left[2\psi(p)\frac{dx}{dp} + x\psi'(p) + 1\right] = 0.$$

Elle conduit donc à une équation linéaire, bien que y ne soit pas une fonction linéaire de x. On trouvera plus loin des exemples plus généraux où pareil fait se produit. Il y a donc lieu de reprendre la question par un procédé propre à la résoudre complètement.

2. Voici comment nous énoncerons le problème :

Déterminer le second membre de l'équation

$$(1) \qquad y = \varphi(x, p),$$

de manière que l'équation dérivée

$$(2) \qquad p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

assigne à $\frac{dp}{dx}$ *une forme analytique donnée à l'avance* $\mathrm{F}(x, p)$.

Comme l'équation (2) donne

$$(4) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{p - \varphi'_x}{\varphi'_p}$$

et que nous supposons

$$(5) \qquad \frac{dp}{dx} = \psi(x, p),$$

on voit que la solution dépend de l'équation aux dérivées partielles

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi(x, p)\frac{\partial \varphi}{\partial p} = p.$$

En traitant le problème de cette façon, nous n'excluons pas la possibilité de l'existence d'un facteur commun aux deux termes de la fraction (4) qui représente $\frac{dp}{dx}$, de sorte que notre équation (2) pourra se décomposer.

Nous avons maintenant à intégrer l'équation (6) qui revient au système

$$(7) \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dp}{\psi(x, p)} = \frac{d\varphi}{p}.$$

En égalant les deux premiers rapports, nous retrouvons l'équation (5) qui est supposée intégrable. Soit

$$(8) \qquad \chi(x, p) = \alpha$$

son intégrale générale résolue par rapport à la constante. D'après la théorie connue, l'expression générale de φ sera de la forme

$$\varphi(x, p) = \mathrm{F}[\chi(x, p)] + \int p\, dx,$$

où p devra être tiré de l'équation $\chi = \alpha$ et où l'on devra, l'intégration faite, remplacer α par $\chi(x, p)$; le symbole F désigne une fonction arbitraire de χ.

La solution la plus générale de notre problème comporte donc une fonction arbitraire, en outre de celles qu'on peut avoir introduites par avance dans l'intégrale (8) qu'on se donne.

Quant à l'équation différentielle proposée, elle a pour intégrale générale

$$y = F(\alpha) + \int p(x, \alpha)\,dx,$$

p étant tiré de la relation $\chi(x, p) = \alpha$.

Nous allons faire quelques applications de ces principes.

3. Cherchons d'abord quelle doit être la forme la plus générale de l'équation (1) pour que dans l'équation dérivée (2) il y ait *séparation des variables p et x* : P', si l'on désigne par P une fonction de p seulement et par P' sa dérivée.

Posons $x = P't$ et écrivons la relation entre t et p, qui est par hypothèse de la forme

$$T(t) + \varpi(p) = \alpha. \tag{9}$$

D'après ce qui précède, nous devons prendre

$$\varphi(x, p) = F(T + \varpi) + \int p\,dx = F(T + \varpi) + px - \int P't\,dp.$$

On sait que t doit être tiré de l'équation $T + \varpi = \alpha$ et qu'après l'intégration α devra être remplacé par $T + \varpi$.

Pour mettre le résultat sous forme entièrement explicite, nous restreindrons sa généralité (qui restera fort grande encore) en supposant $\varpi = P$; en même temps, remplaçons T par une dérivée τ'. L'équation (9) équivaut alors à $\tau'' dt + P' dp = 0$, et il vient

$$\varphi(x,p) = F(\tau' + P) + px + \int \tau'' t\,dt = F(\tau' + P) + px + \tau' t - \tau;$$

d'où l'on tire, en chassant la variable auxiliaire t, une classe étendue d'équations répondant à la question :

$$y = F\left[\tau'\left(\frac{x}{P'}\right) + P(p)\right] + px + \frac{x}{P'}\,\tau'\left(\frac{x}{P'}\right) - \tau\left(\frac{x}{P'}\right). \tag{10}$$

On peut se donner arbitrairement les trois fonctions P, τ et F. En différentiant, on trouve

$$\left(\frac{x}{P'} + F'\right)(d\tau' + dP) = 0,$$

ce qui vérifie notre analyse et met en évidence un facteur conduisant à une solution singulière.

Signalons, en passant, l'hypothèse où la fonction F serait proportionnelle à son argument; elle donne l'équation

$$y = px + m\mathrm{P} + \psi\left(\frac{x}{\mathrm{P}'}\right),$$

analogue à celle de Clairaut, mais plus générale, et dans laquelle rentre, entre autres, l'équation différentielle des coniques homofocales.

4. Le type (10) contient en particulier toutes les équations dont la différentiation conduit à une *équation homogène entre x et p.* En effet, dans une telle équation, il y a séparation des variables p et $x : p$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dt}{f(t) - t} = 0, \qquad \left(t = \frac{x}{p}\right);$$

d'où l'intégrale

$$\log p - \log\tau = -\log\alpha, \qquad \frac{\tau}{p} = \alpha.$$

Nous devons donc prendre pour les fonctions P, ϖ et T précédemment introduites les expressions suivantes

$$\mathrm{P} = p, \qquad \varpi = -\log p, \qquad \mathrm{T} = \log\tau.$$

Nous trouvons ainsi

$$\varphi(x, p) = \mathrm{F}\left(\frac{\tau}{p}\right) + px - \int tp\,dp = \mathrm{F}\left(\frac{\tau}{p}\right) + px - \frac{1}{\alpha^2}\int t\tau\,d\tau.$$

Pour arriver à une forme entièrement explicite, il convient de poser

$$\tau(t) = \sqrt{\theta'(t)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\varphi(x, p) &= \mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{\theta'}}{p}\right) + px - \frac{1}{2\alpha^2}\int t\theta''\,dt \\ &= \mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{\theta'}}{p}\right) + px - \frac{1}{2\alpha^2}(t\theta' - t),\end{aligned}$$

ou, en chassant α et x,

$$\varphi(x, p) = \mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{\theta'}}{p}\right) + \frac{p^2(\theta t)'}{2\theta'}.$$

Ainsi, *toutes les équations dont la différentiation conduit à une équation homogène entre x et p sont contenues dans le* *type*

$$(11)\qquad y = \mathrm{F}\left(\frac{\theta'}{p^2}\right) + \frac{p^2(\theta t)'}{2\theta'}, \qquad \left(t = \frac{x}{p}\right),$$

où θ *désigne une fonction arbitraire de* t, *et* F *une fonction arbitraire de son argument.* Les accents indiquent des dérivées.

Si l'on supprime la fonction F, le second membre se réduit à une fonction homogène et du second degré de x et de p, quelconque d'ailleurs, ce qui est la solution d'Euler (*loc. cit.*). On voit que cette solution n'est pas la seule. On en obtient une autre, particulière aussi, mais d'une généralité non moindre, en prenant

$$\theta = \frac{1}{t-h}, \qquad (h = \text{const.}),$$

ce qui conduit à l'équation

$$y = f(x - hp) + \frac{hp^2}{2},$$

dont l'intégrale générale est

$$y = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2h};$$

la fonction f reste entièrement arbitraire.

Signalons en passant une équation analogue aux précédentes :

$$y = \frac{px}{2} + \varphi_n(x, p),$$

le symbole φ_n désignant une fonction homogène et du degré n en x et p. Si on l'écrit

$$y = \frac{tp^2}{2} + p^n \mathrm{T}(t), \qquad \left(t = \frac{x}{p}\right),$$

la différentiation conduit à celle-ci

$$\frac{n}{n-2}\,\mathrm{T}\,\frac{d}{dt}p^{n-2} + \mathrm{T}'p^{n-2} - \frac{1}{2} = 0,$$

qui est linéaire par rapport à p^{n-2}. L'hypothèse $n = 2$ ramène naturellement à une équation homogène entre x et p.

5. Cherchons maintenant de quelle forme doit être l'équation (1) pour que son équation dérivée soit *linéaire en p*.

La relation entre p et x est, par hypothèse,

$$p = \alpha X'(x) + \xi'(x).$$

Nous devons, d'après la théorie générale, prendre

$$\varphi(x, p) = F\left(\frac{p-\xi'}{X'}\right) + \int p\,dx = F\left(\frac{p-\xi'}{X'}\right) + \alpha X + \xi,$$

d'où, en chassant α, on déduit l'équation

$$(12) \qquad y = F\left(\frac{p-\xi'}{X'}\right) + \frac{p-\xi'}{X'} X + \xi,$$

sur laquelle nous n'insisterons pas, parce qu'il suffit de prendre comme variable X et de poser $z = y - \xi$ pour la réduire à

$$z = X\frac{dz}{dX} + F\left(\frac{dz}{dX}\right),$$

ce qui est une équation de Clairaut.

6. Nous formerons enfin les équations dont la différentiation conduit à une équation *linéaire en x, la variable étant p.*

La relation entre x et p est ici

$$x = \alpha P'(p) + \varpi'(p);$$

on devra donc prendre

$$\begin{aligned}\varphi(x, p) &= F\left(\frac{x-\varpi'}{P'}\right) + \int p(\alpha P'' + \varpi'')\,dp \\ &= F\left(\frac{x-\varpi'}{P'}\right) + \alpha(pP' - P) + p\varpi' - \varpi,\end{aligned}$$

d'où, en chassant α, on déduit la forme générale des équations cherchées :

$$(13) \qquad y = F\left(\frac{x-\varpi'}{P'}\right) + x\left(p - \frac{P}{P'}\right) + \frac{P\varpi' - \varpi P'}{P'}.$$

Une transformation analogue à celle de Legendre les ramène à l'équation de Clairaut. Posons en effet $z = y - px + \varpi$ et prenons pour variable, non pas p, mais P; nous trouverons

$$\frac{dz}{dP} = \frac{1}{P'}\frac{dz}{dp} = -\frac{x-\varpi'}{P'},$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$z = \mathrm{P}\frac{dz}{d\mathrm{P}} + \mathrm{F}_1\left(\frac{dz}{d\mathrm{P}}\right).$$

Néanmoins elle mérite d'être étudiée. Occupons-nous d'abord de son intégration. En la différentiant, on trouve

$$\frac{\mathrm{F}' - \mathrm{P}}{\mathrm{P}'}\left[\frac{d(x-\varpi')}{dp} - \frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{P}'}(x-\varpi')\right] = 0,$$

équation qui se décompose en deux. Le premier facteur, égalé à zéro, fournit une solution singulière. Le second donne une équation linéaire dont l'intégrale générale est bien

$$x = \alpha \mathrm{P}'(p) + \varpi'(p).$$

Celle de la proposée résultera donc de l'élimination de p entre cette dernière équation et la proposée elle-même.

7. Deux cas particuliers doivent être remarqués. Soit d'abord $\varpi = 0$. Il vient ainsi

$$y = \left(p - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}\right)x + \mathrm{F}\left(\frac{x}{\mathrm{P}'}\right), \tag{14}$$

équation qu'on intègre en lui adjoignant la relation

$$\frac{x}{\mathrm{P}'} = \alpha.$$

Soit maintenant $\mathrm{P} = p$; on a ainsi l'équation

$$y = p\varpi' - \varpi + \mathrm{F}(x - \varpi') \tag{15}$$

qu'on intègre en lui adjoignant la relation

$$x - \varpi' = \alpha.$$

Or, cette dernière donne pour p une fonction de $x - \alpha$, de sorte que l'intégrale générale de (15) est de la forme

$$y = f(x-\alpha) + \mathrm{F}(\alpha).$$

De là résulte *l'existence d'une infinité d'équations du type* (15) *qu'on intègre en y remplaçant la dérivée p par une constante arbitraire.* Supposons, en effet, les fonctions F et ϖ telles que l'on ait identiquement

$$(16) \qquad p\varpi'(p) - \varpi(p) = \mathrm{F}(\varpi').$$

L'équation (15) s'écrira

$$(17) \qquad y = \mathrm{F}(\varpi') + \mathrm{F}(x - \varpi') = \varphi(x, p)$$

et son intégrale générale sera

$$y = \mathrm{F}(x - \alpha) + \mathrm{F}(\alpha) = \varphi(x, \mathrm{C}).$$

L'équation de Clairaut n'est donc pas la seule, comme on l'a cru, qui possède la propriété précitée.

Pour former toutes les équations qui en jouissent et qui rentrent dans le type actuel, nous avons à résoudre l'équation (16), qui est une équation de Clairaut. Si l'on prend pour ϖ son intégrale générale

$$\varpi = cp - \mathrm{F}(c),$$

ϖ' se réduira à une constante et l'équation (15) ne sera plus une équation différentielle. Il faut donc recourir à la solution singulière qui, ici comme dans quelques autres cas, est la véritable, et poser $p = \mathrm{F}'(\varpi')$. Nous arrivons ainsi à ce théorème :

Toute équation de la forme

$$(17)' \qquad y = \mathrm{F}[\psi(p)] + \mathrm{F}[x - \psi(p)],$$

dans laquelle les fonctions F *et* ψ *sont liées par la relation*

$$p = \mathrm{F}'[\psi(p)]$$

a pour intégrale générale

$$y = \mathrm{F}(x - \mathrm{C}) + \mathrm{F}(\mathrm{C}),$$

c'est-à-dire que, pour l'intégrer, il suffit d'y remplacer p par une constante arbitraire.

Pour établir directement ce résultat, différentions la proposée, ce qui donne

$$p = \mathrm{F}'_x(x - \psi) + [\mathrm{F}'(\psi) - \mathrm{F}'_x(x - \psi)] \frac{d\psi}{dx}.$$

En vertu de l'identité $p = F'(\psi)$, cette équation se réduit à

$$(p - F'_x)\left(1 - \frac{d\psi}{dx}\right) = 0;$$

son intégrale générale est $x - \psi = C$ et il n'y a qu'à remplacer ψ par $x - C$ dans l'équation $(17)'$ pour avoir son intégrale déjà écrite.

On voit que l'une des fonctions F et ψ est arbitraire. Si l'on se donne F, on déterminera ψ par l'inversion de l'équation $p = F'(\psi)$. Si l'on se donne ψ, on tirera F', puis on aura F par une quadrature. Voici quelques exemples de ces deux procédés.

8. *Exemples.* — Donnons-nous d'abord F. Soit en premier lieu $F(u) = e^u$. Nous aurons successivement

$$p = e^\psi, \qquad \psi = \log p; \qquad y = p + \frac{e^x}{p} = \varphi(x, p).$$

On vérifie aisément que l'intégrale générale est $y = \varphi(x, C)$.

Soit, en second lieu, $F(u) = \log u$. Il viendra

$$p = \frac{1}{\psi}, \qquad \psi = \frac{1}{p}, \qquad y = \log\frac{1}{p} + \log\left(x - \frac{1}{p}\right) = \varphi(x, p).$$

L'intégrale générale est toujours $y = \varphi(x, C)$.

Dans ces deux exemples, l'équation différentielle est algébrique et du second degré en p. Il est facile d'en former d'autres où elle sera de degré plus élevé. Soit en effet $F(u) = \frac{a^m u^{m+1}}{m+1}$. Nous aurons successivement

$$p = a^m \psi^m, \qquad \psi = \frac{p^{\frac{1}{m}}}{a}, \qquad y = \frac{1}{(m+1)a}\left[p^{\frac{m+1}{m}} + \left(ax - p^{\frac{1}{m}}\right)^{m+1}\right] = \varphi(x, p).$$

Si m est l'inverse d'un entier positif n, l'équation différentielle sera du degré n^2. Son intégrale générale est toujours $y = \varphi(x, C)$.

Donnons-nous maintenant ψ. Soit, par exemple,

$$\psi(p) = -\operatorname{arc\,tang} p.$$

L'équation $p = F'(\psi)$ donne $F'(u) = -\operatorname{tang} u$, d'où l'on déduit en intégrant $F(u) = \log\cos u$.

On arrive ainsi à l'équation différentielle

$$y = \log \frac{\cos x - p \sin x}{1 + p^2} = \varphi(x, p),$$

dont l'intégrale générale est $y = \varphi(x, C)$.

9. On pourrait se proposer de *former toutes les équations différentielles du premier ordre dont on obtient l'intégrale en y remplaçant la dérivée par une constante arbitraire.* Comme il est toujours facile de reconnaître si une équation différentielle *donnée* appartient à cette catégorie, le problème n'offre guère qu'un intérêt de curiosité. Nous allons le ramener à la résolution d'une équation fonctionnelle, d'espèce encore innommée, je crois, qui en montrera l'indétermination.

Partons de l'équation finie.

$$(18) \qquad y = \varphi(x, C);$$

on en déduit, par différentiation,

$$(19) \qquad p = \varphi'_x(x, C);$$

or, en éliminant C, on trouve par hypothèse

$$(20) \qquad y = \varphi(x, p).$$

De là résulte que, si l'on élimine p entre les équations (19) et (20), on doit retrouver la précédente (18). Ainsi l'on a identiquement

$$\varphi[x, \varphi'_x(x, C)] = \varphi(x, C).$$

D'une manière plus précise, la fonction φ pouvant n'être pas uniforme, nous dirons que si, dans l'une des déterminations $\varphi(x, p)$ de la fonction cherchée, on remplace p par la dérivée partielle $\varphi'_x(x, p)$ de cette même détermination, on doit retrouver l'une des déterminations de $\varphi(x, p)$.

C'est là une condition nécessaire, imposée à la fonction φ. Il est aisé de voir qu'elle est suffisante. Soit, en effet, une fonction $\varphi(x, p)$ telle qu'on ait identiquement

$$(21) \qquad \varphi[x, \varphi'_x(x, p)] = \varphi(x, p).$$

En différentiant l'équation $y = \varphi(x, p)$, on trouve

$$p = \varphi'_x + \varphi'_p \frac{dp}{dx}.$$

Je dis que l'intégrale générale de cette dernière équation est

$$p = \varphi'_x(x, C)$$

ou que l'on a identiquement

$$\varphi'_x(x, C) = \varphi'_x[x, \varphi'_x(x, C)] + \varphi'_p[x, \varphi'_x(x, C)]\, \varphi''_{x^2}(x, C).$$

Or c'est là précisément ce qu'on obtient en différentiant par rapport à x l'identité (21) et remplaçant p par C.

Cela posé, l'intégrale de l'équation $y = \varphi(x, p)$ est

$$y = \varphi[x, \varphi'_x(x, C)],$$

ou bien $y = \varphi(x, C)$, en vertu de la même identité.

D'après ce qui précède, nous connaissons une solution de l'équation fonctionnelle (21), savoir

$$\varphi(x, p) = F[\psi(p)] + F[x - \psi(p)],$$

les deux fonctions F et ψ n'étant assujetties qu'à la relation $u = F'[\psi(u)]$.

Pour vérifier directement cette solution, formons l'expression

$$\varphi(x, \varphi'_x) = F\left\{\psi[F'(x - \psi)]\right\} + F\left\{x - \psi[F'(x - \psi)]\right\}.$$

Or les opérations F' et ψ sont inverses l'une de l'autre : de l'équation $u = F'(v)$ on tire par hypothèse $v = \psi(u)$, ou encore $v = \psi[F'(v)]$. D'après cela l'expression ci-dessus n'est autre que

$$F(x - \psi) + F[x - (x - \psi)] = F(x - \psi) + F(\psi).$$

Nous retrouvons donc $\varphi(x, p)$ comme nous l'avions annoncé.

Si cette solution n'est pas la seule qui vérifie l'équation fonctionnelle ci-dessus, il est peu probable qu'il en existe une plus simple parmi celles qui présentent la même généralité.