BULLETIN DE LA S. M. F.

LAROSE

# Démonstration du théorème de M. Vaschy sur une distribution quelconque de vecteur

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 24 (1896), p. 177-180
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__177_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

## DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. VASCHY SUR UNE DISTRIBUTION QUELCONQUE DE VECTEUR;

Par M. LAROSE.

**1.** M. Carvallo a donné (*Bull. de la Soc. mathém.*, t. XVIII; 1890) la généralisation suivante de la formule de Green :

Soit un champ U limité par une surface S; soient $\varphi$ un opérateur linéaire fonction du vecteur qui va de l'origine au point considéré, $\nu$ l'unité de normale intérieure, $\nabla$ l'opérateur d'Hamilton; on a l'identité

$$\int\int_S \varphi(\nu)\,d\sigma + \int\int\int_U \varphi(\nabla)\,dv = 0, \tag{1}$$

les dérivations de $\nabla$ portant sur les éléments de $\varphi$.

On passe donc de l'intégrale double à l'intégrale triple en remplaçant $\nu$ par $\nabla$.

**2.** Soit $h$ un vecteur défini en chaque point du champ U; si $\varphi$ est une fonction de $h$ tel que l'intégrale $\int\int \varphi(\nu)\,d\sigma$, prise le long d'une sphère $\Sigma$, soit à un facteur numérique près égale à la valeur moyenne du vecteur $h$ sur la sphère, en appliquant l'identité (1) au volume compris entre S et $\Sigma$, et supposant $\Sigma$ infiniment petit, on aura

$$4\pi h + \int\int_S \varphi(\nu)\,d\sigma + \int\int\int \varphi(\nabla)\,dv = 0; \tag{2}$$

cette identité sera analogue dans l'espace à l'identité de Cauchy dans le plan pour le calcul des résidus.

**3.** On est conduit à une expression de l'opérateur $\varphi$ par les considérations physiques suivantes :

La force exercée sur une masse 1 placée en O par une masse $m$ située en M est, d'après la loi de Newton, égale à $-\frac{\alpha m}{r^2}$, $r$ étant la distance OM et $\alpha$ le vecteur unité de direction OM.

Si en M on a un élément de courant $m_v$ ou masse laplacienne, la force exercée en O sera $-\mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\cdot m_v\right)$.

La résultante des deux forces sera donc $-\mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\cdot q\right)$, $q$ désignant un quaternion dont le scalaire est la masse newtonienne, le vecteur la masse laplacienne.

Sur la sphère $\Sigma$ de centre O, on a $\alpha = \nu$ ($\nu$ normale intérieure au volume U); donc

$$-\int\int_\Sigma \mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\cdot\nu . h\right) ds = \int\int_\Sigma h\,\frac{ds}{r^2} = 4\pi h.$$

Nous poserons $\varphi(\nu) = -\mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\cdot\nu . h\right)$ et l'identité (2) s'écrira

$$4\pi h = \int\int_S \mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\nu h\right) d\sigma + \int\int\int \mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\nabla h\right) dv.$$

Les dérivations du $\nabla$ de l'intégrale triple s'appliquant aux éléments des deux vecteurs $h$ et $\frac{\alpha}{r^2}$,

$$\mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\nabla h\right) = \mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\overline{\nabla h}\right) + \mathrm{V}\left(h\overline{\nabla\frac{\alpha}{r^2}}\right);$$

or on a $\nabla \frac{\alpha}{r^2} = 0$. Il suffit donc d'appliquer les dérivations de $\nabla$ au vecteur $h$.

Cette identité exprime le théorème signalé par M. Vaschy :

*Le champ d'un vecteur quelconque h peut être considéré comme produit par la superposition d'un champ de masses newtoniennes et d'un champ de masses laplaciennes réparties dans le volume* U *et sur la surface limite* S *du champ.*

La loi de distribution est la suivante :

$$4\pi\rho + \mathrm{S}\nabla h = 0, \qquad 4\pi\mu + \mathrm{V}(\nabla h) = 0,$$
$$4\pi\sigma + \mathrm{S}\nu\, h = 0, \qquad 4\pi\tau + \mathrm{V}(\nu h) = 0.$$

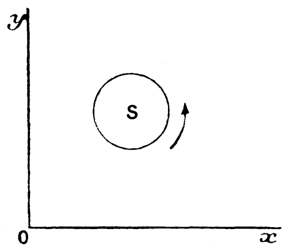
$\rho$, $\sigma$ désignant les densités de masses newtoniennes de volume et de surface, $\mu$, $\tau$ les densités de masses laplaciennes de volume et de surface.

4. L'identité démontrée ci-dessus peut être considérée comme une généralisation de la formule de Cauchy dans le plan pour le calcul des résidus, mais elle est plus générale dans l'espace que l'identité

$$2i\pi f(a) = \int \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

ne l'est dans le plan, puisqu'elle renferme une intégrale triple.

Fig. 1.




La formule de Cauchy résulte immédiatement de l'identité

$$\int_C (X+iY)(dx+idy) = i\int\int_S \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(X+iY)\,dS,$$
$$X+iY = f(z),$$
$$x+iy = z.$$

X, Y sont des fonctions de $x, y$ réelles, continues et uniformes à l'intérieur de l'aire S d'intégration.

Les vecteurs représentatifs d'imaginaires considérés par Cauchy sont assujettis à la relation symbolique

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(X+iY) = 0,$$

qui exprime que la dérivée $f'(z)$ est indépendante de la direction choisie autour du point considéré, et cette relation fait disparaître l'intégrale double.

L'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$ joue dans le plan le rôle de l'opérateur d'Hamilton dans l'espace.

La généralisation immédiate de la formule de Cauchy serait donc

$$4\pi h = \iint \mathrm{V}\left(\frac{\alpha}{r^2}\cdot \nu . h\right) d\mathrm{S},$$

le vecteur $h$ étant assujetti aux équations différentielles

$$\nabla h = 0.$$

Cette identité symbolique s'interprète géométriquement.

Donnons, par exemple, au vecteur $h$ la signification du déplacement du point $(x, y, z)$.

$\nabla h = 0$ exprimera qu'autour du point considéré il n'y a ni déformation, ni rotation; le mouvement est un simple mouvement de translation.