BULLETIN DE LA S. M. F.

ZAREMBA

Contribution à la théorie de la fonction de Green

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 19-24

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__19_1>

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE LA FONCTION DE GREEN;

par M. Zaremba.

1. La lecture du beau Mémoire de M. Picard (*Journal de Liouville,* t. VI, 4e série) fait immédiatement naître l'idée qu'un grand nombre de résultats, établis par l'éminent géomètre pour les équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, doivent pouvoir s'étendre au cas de plusieurs variables indépendantes. On reconnaît immédiatement que la chose se ramène à la démonstration d'une propriété de la fonction de Green, facile à établir dans le plan par la représentation conforme, mais beaucoup moins immédiate dans les autres cas. C'est cette propriété qui fera l'objet du présent travail. Nous nous bornerons à trois variables indépendantes, ce qui est le cas le plus intéressant, mais on verra que la méthode suivie pourrait s'appliquer au cas général.

2. Voici l'énoncé de la propriété dont il vient d'être question.

Soit $G(x, y, z; x', y', z')$ la fonction de Green relative à un domaine D limité par une surface convexe S admettant en chacun de ses points des rayons de courbure déterminés. Désignons par d la plus grande distance de deux points pris sur la surface S et par a la limite inférieure des rayons de courbure de la surface S en un point variable. Je dis que l'intégrale

$$I = \int\int\int \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| dx'\, dy'\, dz', \tag{1}$$

étendue à tout le domaine D, est inférieure à un nombre N jouissant des propriétés suivantes :

a. Le nombre N dépend *uniquement* de la surface S.

b. Le nombre N tend vers zéro lorsque la surface S varie de façon que d tende vers zéro, le rapport $\frac{d}{a}$ ne dépassant jamais un nombre fixe M.

En posant

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

on peut écrire

$$G(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{\rho} - v(x, y, z; x', y', z'), \tag{2}$$

le second terme du second membre étant une fonction qui admet des dérivées finies et continues dans tout le domaine D et sur la frontière S de ce domaine.

La fonction G étant positive à l'intérieur de la surface S, la fonction u, définie sur cette surface par l'équation

$$4\pi u = \frac{d}{dn}\frac{1}{\rho} - \frac{dv}{dn},$$

où chaque terme du second membre représente suivant l'usage une dérivée prise suivant la normale intérieure élevée en un point P de la surface, ne deviendra négative pour aucune position du point P.

D'ailleurs, en appelant $d\omega$ l'élément de la surface S à l'intérieur duquel se trouve le point P et en désignant par r la distance du point P au point défini par les coordonnées x, y, z, on vérifie tout de suite que la fonction

$$w(x, y, z) = \int \frac{u\, d\omega}{r}, \tag{3}$$

où l'intégration doit être étendue à toute la surface S, coïncide, à l'intérieur de cette surface, avec la fonction v et, à l'extérieur, avec la fonction $\frac{1}{\rho}$.

3. Proposons-nous de former une fonction qui, à l'intérieur de la surface S, ne soit jamais inférieure à la fonction f définie par l'équation

$$f = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \tag{4}$$

Désignons, à cet effet, par A le point (supposé intérieur à la surface S) dont les coordonnées sont x, y et z et soit A_0 un point de la surface S (qui, en général, sera unique) dont la distance au point A ne soit supérieure à celle d'aucun autre point de la surface.

Considérons, en outre, le point A_1 symétrique du point A par rapport au point A_0, et posons

$$r = \overline{AP}, \qquad r_1 = \overline{A_1P}, \qquad b = \overline{AA_0};$$

soit enfin R une longueur égale à la plus grande des longueurs a et b. On aura

(5) $$b \leqq R,$$

et en même temps

(6) $$\frac{r_1}{r} \leqq \frac{2R + b}{2R - b},$$

quelle que soit la position du point P sur la surface S.

4. Regardons la droite indéfinie AA_1 comme un axe ξ dirigé du point A vers le point A_1 et rapportons cet axe au point A. Cela posé, cherchons une limite supérieure de la valeur absolue de la dérivée

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \int_S \frac{u \cos(AP, \xi)\, d\omega}{r^2},$$

et, dans ce but, comparons-la avec

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=2b} = \int_S \frac{u \cos(A_1P, \xi)\, d\omega}{r_1^2}.$$

La surface S étant convexe, on aura

$$\cos(A_1P, \xi) < 0,$$
$$|\cos(AP, \xi)| < |\cos(A_1P, \xi)|.$$

Il vient d'ailleurs, à raison des inégalités (5) et (6),

$$\frac{1}{r} < \frac{3}{r_1}.$$

Par conséquent, en se rappelant que u n'est jamais négatif, on trouve

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}\right| < 9\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=2b}\right|.$$

Soit A′ le point dont les coordonnées sont x', y' et z'. On aura, à cause des propriétés de w à l'extérieur de la surface S,

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=2b}\right| \leqq \frac{1}{\overline{\mathrm{A'A_1}}^2},$$

et comme on a, par suite de la convexité de la surface S,

$$\overline{\mathrm{A'A}} < \overline{\mathrm{A'A_1}},$$

il viendra

(7) $$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}\right| < \frac{9}{\overline{\mathrm{A'A}}^2}.$$

5. Menons par le point A un axe quelconque η perpendiculaire à l'axe $\mathrm{AA_1}$, rapportons cet axe au point A et cherchons une limite supérieure de la valeur absolue de la dérivée

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \int_{\mathrm{S}} \frac{u \cos(\mathrm{AP}, \eta)\, d\omega}{r^2}.$$

Menons pour cela par le point $\mathrm{A_1}$ un axe η_1 de même sens que l'axe η, rapportons cet axe au point $\mathrm{A_1}$ et envisageons la dérivée

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0} = \int_{\mathrm{S}} \frac{u \cos(\mathrm{A_1P}, \eta_1)\, d\omega}{r_1^2}.$$

En posant

$$\lambda = r\cos(\mathrm{AP}, \eta) = r_1 \cos(\mathrm{A_1P}, \eta_1),$$

on aura

(8) $$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} - \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0} = \int_{\mathrm{S}} \lambda u \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) d\omega.$$

En tenant compte de l'identité

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rr_1} + \frac{1}{r_1^2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right),$$

et en observant que

$$r \leqq r_1,$$

on trouve

(9) $$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} \leqq \frac{3}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Or, lés inégalités (5) et (6) nous donnent

$$\frac{r_1 - r}{r} \leqq \frac{2b}{R},$$

et comme

$$b \leqq r_1,$$

il vient

(10) $$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} < \frac{2}{R}.$$

Par conséquent, en tenant compte des inégalités (9) et (10) et en remarquant que

$$|\lambda| < r,$$

on déduit de la relation (8)

$$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} - \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0} \right| < \frac{6}{R} \int \frac{u\, d\omega}{r},$$

ou bien, eu égard à la définition de w,

(11) $$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \right| < \left| \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0} \right| + \frac{6w}{R}.$$

La lettre A′ désignant toujours le point (x', y', z'), on aura

$$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0} \right| \leqq \frac{1}{\overline{A'A_1}^2},$$

et, par conséquent, *a fortiori,*

(12) $$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=0} \right| < \frac{1}{\overline{A'A}^2}.$$

Le point A étant intérieur à la surface S

$$w < \frac{1}{A'A},$$

on aura donc à plus forte raison, en se rappelant que d désigne la plus grande distance de deux points variables sur la surface S,

(13) $$w < \frac{d}{\overline{A'A}^2}.$$

On peut donc conclure des inégalités (11), (12) et (13)

$$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\right| < \left(1 + \frac{6d}{R}\right)\frac{1}{\overline{A'A}^2};$$

d'où, puisque a désigne une limite inférieure de la longueur R,

(14) $$\left|\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\right| < \left(1 + \frac{6d}{a}\right)\frac{1}{\overline{A'A}^2}.$$

6. On déduit immédiatement des inégalités (7) et (14)

$$f = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 < \left[81 + 2\left(1 + \frac{6d}{a}\right)^2\right]\frac{1}{\overline{A'A}^4},$$

ou bien

$$f < \frac{Q^2}{\rho^4},$$

en posant

$$Q^2 = 81 + 2\left(1 + \frac{6d}{a}\right)^2, \qquad \overline{A'A} = \rho.$$

7. Il vient, en rapprochant cette inégalité de l'équation (2),

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| < \frac{1 + Q}{\rho^2}.$$

Par conséquent, l'intégrale I, définie par l'équation (1), satisfait à l'inégalité

$$J < (1 + Q)\iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\rho^2},$$

où l'intégration est étendue à une sphère de centre A et de rayon d. Il en résulte

$$J < 4\pi(1 + Q)d,$$

inégalité qui démontre notre théorème.