Bulletin de la S. M. F.

J. Bendixson

Démonstration de l’existence de l’intégrale d’une équation aux dérivées partielles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 220-225
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__220_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1896, tous droits réservés.

L’accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE L'INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRE;

Par M. Ivar Bendixson.

Étant donnée une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

la méthode d'approximation de Cauchy met en évidence l'existence d'une intégrale qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0, si l'on ne fait sur la fonction f que les hypothèses suivantes : dans le domaine

$$|x - x_0| < \delta, \qquad |y - y_0| < \delta, \tag{2}$$

la fonction f est continue; il existe une quantité positive k telle qu'on ait

$$|f(x, y') - f(x, y)| < k\,|y' - y|,$$

y', y et x étant des valeurs des variables appartenant au domaine (2).

Quand il s'agit de la démonstration de l'existence d'une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) = 0,$$

qui, pour $x = x_0$, soit égale à y_0, on se borne, en général, à en établir l'existence dans le cas où f est une fonction holomorphe des deux variables. En étudiant la méthode d'approximation de Cauchy de plus près, il n'est pourtant pas difficile de remplir cette lacune et d'en tirer une démonstration de l'existence de l'intégrale, en ne faisant sur la fonction f d'autre hypothèse que celle d'être elle-même continue, et d'avoir sa dérivée première par rapport à y, $f'_y(x, y)$, continue, pour les valeurs de x et y appartenant au domaine (2).

Cette hypothèse faite, nous prouverons, en effet, que si

$$y = \psi(x, x_0, y_0)$$

représente l'intégrale de l'équation (1), qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0, cette fonction regardée comme fonction des constantes d'intégration x_0, y_0 satisfait à l'équation

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{dy}{dy_0} f(x_0, y_0) = 0. \tag{3}$$

Soit, à cette fin, M la valeur absolue maxima de $f(x, y)$ pour les points du domaine (2) et ρ une quantité positive satisfaisant aux inégalités

$$\rho \leqq \delta, \qquad \rho \leqq \frac{\delta}{M}.$$

Considérons une valeur de x pour laquelle $|x - x_0| < \rho$, et partageons l'intervalle $x_0 x$ en intervalles $x_0 x_1$, $x_1 x_2$, ..., $x_{n-1} x_n (x_n = x)$. Formons ensuite, conformément à la méthode de Cauchy, les équations

$$\begin{aligned}
y_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0), \\
y_2 - y_1 &= f(x_0, y_1)(x_2 - x_1), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
y_n - y_{n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

on aura

$$\lim_{n=\infty} y_n = y = \psi(x, x_0, y_0).$$

Avant d'aller plus loin nous établirons le lemme suivant :

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction de x et y continue pour tous les points du domaine (2); *on aura*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \varphi(x_\nu, y_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu) = \int_{x_0}^{x} \varphi[x, \psi(x, x_0, y_0)]\, dx.$$

Ayant fixé un nombre positif σ aussi petit que l'on voudra, on peut toujours, en effet, déterminer une quantité positive ε suffisamment petite pour que l'on ait

$$|\varphi(x, y') - \varphi(x, y)| < \sigma,$$

tant que $|y' - y| < \varepsilon$, y', y, x étant des valeurs quelconques satisfaisant à (2). Mais on sait de plus ([1]) qu'on peut prendre les intervalles de division suffisamment petits pour qu'on ait

$$|y_1 - \psi(x_\nu)| < \varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

d'où l'inégalité

$$|\varphi(x_\nu, y_\nu) - \varphi[x_\nu, \psi(x_\nu)]| < \sigma.$$

On voit que cette inégalité entraîne la suivante :

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(\nu, y_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi[x_\nu, \psi(x_\nu)](x_{\nu+1} - x_\nu) \right| < \sigma\rho.$$

En prenant la limite des deux membres, et en observant que σ est une quantité aussi petite que l'on voudra, on trouve enfin

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(x_\nu, y_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu) - \int_{x_0}^{x} \varphi[x, \psi(x)]\, dx = 0.$$

Ce lemme établi, étudions maintenant y comme fonction de y_0.

([1]) *Voir*, par exemple, PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 294, 295.

On a

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = 1 + f'_y(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 1 + f'_y(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial y_{n-1}} = 1 + f'_y(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Donnons à y_0 un accroissement Δy_0, et désignons par Δy_1, Δy_2, ..., Δy_n, Δy les accroissements correspondants des fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n, y$.

On aura les équations suivantes

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta y_0} = 1 + f'_y(x_0, y_0 + \theta_0 \Delta y_0)(x_1 - x_0),$$

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = 1 + f'_y(x_1, y_1 + \theta_1 \Delta y_1)(x_2 - x_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta y_{n-1}} = 1 + f'_y(x_{n-1}, y_{n-1} + \theta_{n-1} \Delta y_{n-1})(x_n - x_{n-1}),$$

où θ_0, θ_1, ..., θ_{n-1} sont compris entre zéro et l'unité. Je dis maintenant que si l'on a fixé un nombre positif σ aussi petit que l'on voudra, on pourra toujours déterminer un nombre positif ε tel que l'on ait

$$|\Delta y_\nu| < \sigma \qquad (\nu = 1, 2, \dots),$$

tant que $|\Delta y_0| < \varepsilon$, $|x - x_0| \leqq \frac{\rho}{2}$.

Observons, à cet effet, que pour $|\Delta y_0| < \frac{\delta}{2}$, $|x - x_0| < \frac{\rho}{2}$, on sait [1] qu'on a

$$|y_\nu + \Delta y_\nu - y_0 - \Delta y_0| < \frac{\delta}{2},$$

d'où l'on conclut que $y_\nu + \Delta y_\nu$ appartient au domaine (2).

En désignant par M' la valeur absolue maxima de $f'_y(x, y)$ pour

---

[1] Picard, *loc. cit.*

les points de ce domaine, on aura

$$\left|\frac{\Delta y_1}{\Delta y_0}\right| < 1 + M(x_1 - x_0) < e^{M(x_1 - x_0)},$$

$$\left|\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}\right| < 1 + M(x_2 - x_1) < e^{M(x_2 - x_1)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'où l'on conclut que

$$\left|\frac{\Delta y_\nu}{\Delta y_0}\right| < e^{M\frac{\rho}{2}}, \qquad \nu = 1, 2, \dots.$$

Nous n'aurons donc qu'à prendre ε moindre que $\sigma e^{-\frac{M\rho}{2}}$ pour que l'on ait

$$|\Delta y_\nu| < \varepsilon,$$

tant que $|\Delta y_0| < \varepsilon$.

Ce point établi, la démonstration est immédiate.

Ayant fixé une quantité positive τ aussi petite que l'on voudra, on voit aisément que l'on peut déterminer σ assez petit pour avoir

$$|\log[1 + f'_y(x_\nu, y_\nu + \theta_\nu \Delta y_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu)] - f'_y(x_\nu, y_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu)| < \tau\,|x_{\nu+1} - x_\nu|,$$

tant que $|\Delta y_\nu| < \sigma$. D'après ce que nous venons de démontrer, on peut alors déterminer un nombre positif ε, tel que l'on ait

$$\left|\log\frac{\Delta y_{\nu+1}}{\Delta y_\nu} - f'_y(x_\nu, y_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu)\right| < \tau\,|x_{\nu+1} - x_\nu|,$$

tant que $|\Delta y_0| < \varepsilon$.

En faisant la sommation depuis $\nu = 0$ jusqu'à $\nu = n - 1$, on parvient à

$$\left|\log\frac{\Delta y_n}{\Delta y_0} - \sum_{\nu=0}^{n-1} f'_y(x_\nu, y_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu)\right| < \tau\rho.$$

Si l'on fait croître le nombre des points de division de l'intervalle $x_0 x$, la limite de Δy_n sera Δy et, ayant égard au lemme ci-dessus établi, on pourra écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} f'_y[x, \psi(x)]\,dx} e^{\theta\tau\rho}, \qquad \text{où} \qquad |\theta| < 1.$$

Faisons ensuite tendre ε vers zéro, il s'ensuit que τ tend vers zéro, ce qui conduit à l'égalité

$$(4)\qquad \frac{\partial y}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} f'_y[x, \psi(x)]\,dx}$$

D'une manière tout analogue, on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} f'_y[x, \psi(x)]\,dx},$$

et ces deux équations mettent en évidence que la fonction y satisfait à l'équation (3).

La fonction $y = \psi(x, x_0, y_0)$ se réduisant à y_0 pour $x_0 = x$, on aura l'intégrale la plus générale de l'équation (3) qui, pour $x_0 = x$, se réduit à $\varphi(y_0)$, φ étant une fonction quelconque possédant une dérivée, si l'on prend

$$z = \varphi[\psi(x, x_0, y_0)].$$

L'équation (4) me semble enfin offrir de l'intérêt en elle-même. Dans le cas où l'on peut déterminer une fonction φ satisfaisant à l'égalité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(x, y) = f'_y(x, y),$$

l'équation (4) s'écrit

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = e^{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)},$$

équation qui pourrait servir à l'étude des propriétés de l'intégrale de l'équation (1). La fonction $\mu = e^{-\varphi}$ satisfaisant à

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial[\mu f(x, y)]}{\partial y} = 0,$$

on voit que $e^{-\varphi(x, y)}$ est un multiplicateur de l'équation (1).

FIN DU TOME XXIV.