BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 2-19
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__2_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR DEUX CLASSES DE SURFACES ANALOGUES AUX SURFACES TÉTRAÉDRALES;

Par M. L. Raffy.

On appelle *surfaces tétraédrales* les surfaces représentées en coordonnées cartésiennes par les formules

$$x = A(u-a)^m(v-a)^m,$$
$$y = B(u-b)^m(v-b)^m,$$
$$z = C(u-c)^m(v-c)^m,$$

dans lesquelles u et v désignent deux paramètres variables, les autres lettres des constantes. Il est bien connu que les courbes $u = \text{const.}$ et les courbes $v = \text{const.}$ tracent sur ces surfaces un réseau conjugué.

I.

1. Je considère les surfaces représentées par les formules plus générales

$$(1) \qquad x = U_1(u)V_1(v), \qquad y = U_2(u)V_2(v), \qquad z = U_3(u)V_3(v),$$

les fonctions U_i et V_i étant telles que les courbes $u = \text{const.}$ et les courbes $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué.

Je vais déterminer toutes les surfaces ainsi définies et je montrerai que, pour chacune d'elles, les lignes asymptotiques sont déterminées par deux quadratures.

2. Une surface étant rapportée à des coordonnées curvilignes u, v, pour que les courbes coordonnées forment un réseau conjugué, il faut et il suffit, comme on sait, que le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul. Si nous désignons les dérivées par des accents, cette condition deviendra, pour les surfaces considérées,

$$(2) \qquad D' = \begin{vmatrix} U'_1 V'_1 & U'_1 V_1 & U_1 V'_1 \\ U'_2 V'_2 & U'_2 V_2 & U_2 V'_2 \\ U'_3 V'_3 & U'_3 V_3 & U_3 V'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Débarrassons-nous d'abord d'un cas particulier, celui où l'une des six dérivées qui figurent dans cette équation se réduirait à zéro. Soit, par exemple, $U'_3 = 0$. Si l'on écarte l'hypothèse $U_3 V'_3 = 0$, qui ne donnerait que le plan, il reste

$$U'_1 U'_2 (V'_1 V_2 - V_1 V'_2) = 0.$$

Si l'on égale à zéro l'une des fonctions V, on trouve un plan ; si l'une des dérivées U'_1, U'_2 est nulle, la surface est un cylindre.

La supposition

$$\frac{V'_2}{V_2} = \frac{V'_1}{V_1}$$

conduit aux surfaces

$$(3) \qquad x = U_1 V_1, \qquad y = U_2 V_1, \qquad z = V_3,$$

qui sont bien connues. Peterson a donné dès 1866, dans le *Journal de la Société mathématique de Moscou,* des déformations à un paramètre pour toutes ces surfaces. Plus récemment, M. Jamet (*Annales de l'École Normale supérieure,* année 1887) a étudié des surfaces qui ne diffèrent de celles-là que par une transformation projective et montré que leurs lignes asymptotiques sont déterminées par deux quadratures. En effet, les équations (3) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(4) \qquad \frac{y}{x} = u, \qquad x = \frac{f(z)}{\varphi(u)},$$

d'où l'on déduit, pour les asymptotiques, l'équation différentielle

$$\frac{f''(z)}{f(z)}\,dz^2 - \frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}\,du^2 = 0.$$

3. Nous pouvons maintenant supposer qu'aucune des six dérivées $U'_1, \ldots, V'_3$ ne se réduit à zéro, ce qui permet d'écrire ainsi l'équation du problème

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{V_1}{V'_1} & \dfrac{U_1}{U'_1} \\ 1 & \dfrac{V_2}{V'_2} & \dfrac{U_2}{U'_2} \\ 1 & \dfrac{V_3}{V'_3} & \dfrac{U_3}{U'_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une somme de trois termes de la forme UV. En le différentiant deux fois par rapport à u, on obtient deux équations qui, jointes à la première, permettent d'éliminer les trois fonctions V. On arrive ainsi à la relation qui exprime que les trois fonctions U sont solutions d'une même équation différentielle linéaire, homogène et du second ordre. On a donc nécessairement

$$(7) \qquad \frac{U_i}{U'_i} = a_i f(u) + \alpha_i \varphi(u) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et, pour les mêmes raisons,

$$(8) \qquad \frac{V_i}{V'_i} = b_i\, l(v) + \beta_i \lambda(v) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les lettres a et b, α et β désignant des constantes, les symboles f, φ, l et λ des fonctions arbitraires.

D'après cela, trois cas peuvent se présenter et trois seulement : 1° les trois fonctions (7) sont proportionnelles entre elles, ainsi que les trois fonctions (8); 2° les trois fonctions (7) sont proportionnelles entre elles, mais les trois fonctions (8) ne le sont point; 3° ni les fonctions (7), ni les fonctions (8) ne sont proportionnelles entre elles.

4. *Premier cas.* — Nous supposons qu'on ait à la fois

$$m_1 \frac{U_1}{U'_1} = m_2 \frac{U_2}{U'_2} = m_3 \frac{U_3}{U'_3} = \frac{U}{U'}, \tag{9}$$

$$n_1 \frac{V_1}{V'_1} = n_2 \frac{V_2}{V'_2} = n_3 \frac{V_3}{V'_3} = \frac{V}{V'}, \tag{10}$$

les lettres m et n désignant des constantes, U une fonction de u, et V une fonction de v. De ces relations on déduit, en négligeant des facteurs de proportionnalité qui sont sans influence,

$$x = U^{m_1} V^{n_1}, \qquad y = U^{m_2} V^{n_2}, \qquad z = U^{m_3} V^{n_3}.$$

A la vérité, les exposants m et n ne sont pas entièrement arbitraires, car la substitution des expressions (9) et (10) dans l'équation (6) conduit à une relation quadratique et homogène entre les inverses de ces exposants. Mais, comme il existe toujours trois nombres α, β, γ satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} \alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 &= 0, \\ \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 &= 0, \end{aligned}$$

les surfaces que nous venons d'obtenir auront pour équation

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{const.}$$

Ainsi, elles rentrent visiblement dans le type (4) précédemment obtenu, ce qui nous dispense d'insister davantage.

5. *Second cas.* — Nous supposons qu'on ait encore

$$m_1 \frac{U_1}{U'_1} = m_2 \frac{U_2}{U'_2} = m_3 \frac{U_3}{U'_3}, \tag{9}$$

mais qu'*aucun* des rapports des trois fonctions (8), prises deux à deux, ne soit constant.

En vertu de l'hypothèse actuelle et des formules générales (8), l'équation (6) devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{m_1} & b_1 l(v) + \beta_1 \lambda(v) \\ 1 & \dfrac{1}{m_2} & b_2 l(v) + \beta_2 \lambda(v) \\ 1 & \dfrac{1}{m_3} & b_3 l(v) + \beta_3 \lambda(v) \end{vmatrix} = 0.$$

C'est là une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les deux fonctions $l(v)$ et $\lambda(v)$. Puisque leur rapport n'est pas constant, il faut que le coefficient de $l(v)$ et celui de $\lambda(v)$ soient séparément nuls; d'où

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m_1} & b_1 \\ 1 & \frac{1}{m_2} & b_2 \\ 1 & \frac{1}{m_3} & b_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m_1} & \beta_1 \\ 1 & \frac{1}{m_2} & \beta_2 \\ 1 & \frac{1}{m_3} & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations donnent

$$b_1 = \frac{b}{m_1} + c, \qquad b_2 = \frac{b}{m_2} + c, \qquad b_3 = \frac{b}{m_3} + c,$$

$$\beta_1 = \frac{\beta}{m_1} + \gamma, \qquad \beta_2 = \frac{\beta}{m_2} + \gamma, \qquad \beta_3 = \frac{\beta}{m_3} + \gamma,$$

les lettres b, c, β, γ désignant des arbitraires [1]. Il vient alors

$$\frac{V_1}{V_1'} = c\,l(v) + \gamma\lambda(v) + \frac{b\,l(v) + \beta\lambda(v)}{m_1},$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{V_1}{V_1'} = \psi(v) + \frac{\chi(v)}{m_1},$$

en représentant par $\psi(v)$ et $\chi(v)$ deux nouvelles fonctions arbitraires. On déduit de là

$$\frac{dV_1}{V_1} = \frac{m_1\,dv}{\psi(v)\left[m_1 + \frac{\chi(v)}{\psi(v)}\right]}.$$

Mais on peut prendre pour variable le rapport $\chi : \psi$, qui, en vertu de notre hypothèse, ne se réduit certainement pas à une constante; si nous l'appelons encore v, nous trouverons

$$V_1 = e^{m_1 \int \frac{g(v)\,dv}{v+m_1}}. \tag{10}$$

---

(1) Nous n'écartons ainsi que la solution $m_1 = m_2 = m_3$, qui conduirait à des cônes.

Les expressions des fonctions V_2 et V_3 ne différeront de celle-là que par l'indice de m et, comme les relations (9) donnent

$$U_1 = U^{m_1}, \qquad U_2 = U^{m_2}, \qquad U_3 = U^{m_3},$$

nous obtenons finalement les formules

$$(11) \quad x = u^{m_1} e^{m_1 \int \frac{g(v)\,dv}{v+m_1}}, \qquad y = u^{m_2} e^{m_2 \int \frac{g(v)\,dv}{v+m_2}}, \qquad z = u^{m_3} e^{m_3 \int \frac{g(v)\,dv}{v+m_3}},$$

qui dépendent d'une seule fonction arbitraire $g(v)$ et de trois constantes arbitraires m_1, m_2, m_3; car nous avons pu, sans restreindre la généralité, remplacer U par la variable u.

Les surfaces que nous venons d'obtenir n'ont pas encore été signalées, que je sache.

Proposons-nous d'obtenir leurs lignes asymptotiques. A cet effet, nous formerons les deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \qquad D'' = \begin{vmatrix} x''_{v^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{v^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{v^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix}.$$

Le calcul, effectué au moyen des formules (11), donne

$$D = \frac{m_1 m_2 m_3 xyz\, g(v)}{u^3(v+m_1)(v+m_2)(v+m_3)} \sum m_1 m_2 (m_1 - m_2),$$

$$D'' = -\frac{m_1 m_2 m_3 xyz\, g^2(v)[v g(v) + 1]}{u(v+m_1)^2(v+m_2)^2(v+m_3)^2} \sum m_1 m_2 (m_1 - m_2).$$

Comme le déterminant D' est nul, les courbes coordonnées étant conjuguées, l'équation différentielle des asymptotiques

$$(12) \qquad D\,du^2 + D''\,dv^2 = 0$$

se réduit ici à

$$\frac{du^2}{u^2} - \frac{g(v)[v g(v) + 1]\,dv^2}{(v+m_1)(v+m_2)(v+m_3)} = 0.$$

On voit qu'elle est de la forme

$$F(u)\,du^2 - \Phi(v)\,dv^2 = 0.$$

En conséquence, *les lignes asymptotiques des surfaces* (11) *sont déterminées par deux quadratures.*

6. *Troisième cas.* — Nous supposons que les fonctions $U_i : U'_i$ ne sont point proportionnelles entre elles, non plus que les fonctions $V_i : V'_i$. Par suite, les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$, qui figurent dans les formules (7) ne sont pas dans un rapport constant, non plus que les fonctions $l(v)$ et $\lambda(v)$ des formules (8). Or, si l'on substitue les expressions (7) et (8) dans l'équation (6), on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 l(v) + \beta_1 \lambda(v) & a_1 f(u) + \alpha_1 \varphi(u) \\ 1 & b_2 l(v) + \beta_2 \lambda(v) & a_2 f(u) + \alpha_2 \varphi(u) \\ 1 & b_3 l(v) + \beta_3 \lambda(v) & a_3 f(u) + \alpha_3 \varphi(u) \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette identité étant linéaire et homogène en $f(u)$ et $\varphi(u)$; il faut que le coefficient de $f(u)$ et celui de $\varphi(u)$ soient nuls, sans quoi le rapport $f : \varphi$ serait constant. Mais chacun de ces coefficients est lui-même linéaire et homogène en $l(v)$ et $\varphi(v)$; il doit donc, pour que le rapport $f : \lambda$ ne se réduise pas à une constante, être identiquement nul. En d'autres termes, on doit supposer nuls les quatre déterminants en lesquels se décompose le précédent. Si l'on n'écrit, pour abréger, qu'une ligne de chacun d'eux, on aura les quatre équations

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \| 1 \quad a_i \quad b_i \| = 0, \\ \| 1 \quad \alpha_i \quad \beta_i \| = 0, \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} \| 1 \quad a_i \quad \beta_i \| = 0, \\ \| 1 \quad \alpha_i \quad b_i \| = 0. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Il est aisé de voir qu'on satisfait de la manière la plus générale possible aux équations (13) en prenant

$$(13)' \quad \left\{\begin{array}{lll} a_i = a + a'k_i, & b_i = b + b'k_i & (i = 1, 2, 3), \\ \alpha_i = \alpha + \alpha'\varkappa_i, & \beta_i = \beta + \beta'\varkappa_i & (i = 1, 2, 3), \end{array}\right.$$

toutes les lettres nouvelles désignant des constantes arbitraires. Si l'on substitue ces expressions des douze paramètres a_i, b_i, α_i, β_i dans les équations (14), on trouve

$$(14)' \quad \left\{\begin{array}{l} a'\beta' \; \| 1 \quad k_i \quad \varkappa_i \| = 0, \\ \alpha' b' \; \| 1 \quad \varkappa_i \quad k_i \| = 0, \end{array}\right.$$

Si le déterminant qui figure dans ces deux équations n'est pas nul, on devra supposer soit $a' = 0$ et $\alpha' = 0$, ce qui entraînerait l'identité des trois fonctions $U_i : U'_i$, soit $\alpha' = 0$ et $\beta' = 0$. Dans ce dernier cas, les relations $(13)'$ donnent

$$a_i = a + a' k_i, \qquad b_i = b_i + b' k_i,$$
$$\alpha_i = \alpha, \qquad \beta_i = \beta;$$

les formules (7) et (8) deviennent

$$\frac{U_i}{U'_i} = (a + a' k_i) f(u) + \alpha\varphi(u),$$
$$\frac{V_i}{V'_i} = (b + b' k_i)\, l(v) + \beta\lambda(v).$$

On en déduit

$$\frac{dU_i}{U_i} = \frac{du}{af(u) + \alpha\varphi(u) + k_i a' f(u)},$$
$$\frac{dV_i}{V_i} = \frac{dv}{bl(v) + \beta\lambda(v) + k_i b'\lambda(v)}.$$

Comme on a nécessairement ici $a' b' \neq 0$, on pourra écrire

$$\frac{dU_i}{U_i} = \frac{1}{\dfrac{af(u) + \alpha\varphi(u)}{a' f(u)} + k_i} \frac{du}{a' f(u)},$$
$$\frac{dV_i}{V_i} = \frac{1}{\dfrac{bl(v) + \beta\lambda(v)}{b'\lambda(v)} + k_i} \frac{dv}{b'\lambda(v)}.$$

Il suffira, dès lors, de prendre comme nouvelles variables

$$u' = \frac{af(u) + \alpha\varphi(u)}{a' f(u)}, \qquad v' = \frac{bl(v) + \beta\lambda(v)}{b'\lambda(v)},$$

pour trouver

$$\frac{dU_i}{U_i} = \frac{F(u')\,du'}{u' + k_i}, \qquad \frac{dV_i}{V_i} = \frac{G(v')\,dv'}{v' + k_i},$$

et, finalement, en supprimant les accents,

$$\log x = \int \frac{F(u)\,du}{u + k_1} + \int \frac{G(v)\,dv}{v + k_1}, \tag{15}$$

ainsi que deux formules analogues avec k_2 et k_3 pour $\log y$ et $\log z$.

Égalons maintenant à zéro le déterminant $(14)'$. Toutes les solutions de l'équation ainsi obtenue

$$\| 1 \quad k_i \quad \varkappa_i \| = 0$$

sont représentées par les formules

$$k_i = m + n r_i, \qquad \varkappa_i = \mu + \nu r_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

d'où l'on déduit, en vertu des relations $(13)'$,

$$\begin{aligned} a_i &= a + m a' + n a' r_i, & b_i &= b + m b' + n b' r_i, \\ \alpha_i &= \alpha + \mu \alpha' + \nu \alpha' r_i, & \beta_i &= \beta + \mu \beta' + \nu \beta' r_i. \end{aligned}$$

Par suite les expressions (7) et (8) deviennent

$$\frac{U_i}{U'_i} = (a + m a') f(u) + (\alpha + \mu \alpha') \varphi(u) + r_i [n a' f(u) + \nu \alpha' \varphi(u)].$$

$$\frac{V'_i}{V_i} = (b + m b')\, l(v) + (\beta + \mu \beta') \lambda(v) + r_i [n b'\, l(v) + \nu \beta' \lambda(v)].$$

En répétant le raisonnement qui vient d'être fait, on arrivera exactement aux mêmes conclusions que dans l'hypothèse précédente. En résumé, dans le troisième cas, on n'obtient pas d'autres surfaces que celles qui sont représentées par les formules

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \log x &= \int \frac{U\,du}{u + a} + \int \frac{V\,dv}{v + a}, \\ \log y &= \int \frac{U\,du}{u + b} + \int \frac{V\,dv}{v + b}, \\ \log z &= \int \frac{U\,du}{u + c} + \int \frac{V\,dv}{v + c}, \end{aligned} \right.$$

où U et V sont deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v, a, b, c trois constantes quelconques.

M. Sophus Lie, qui a le premier considéré ces surfaces, a indiqué (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIV, p. 335) qu'on peut déterminer leurs lignes asymptotiques. Pour le vérifier, il suffit de calculer, au moyen des formules (16), les fonctions D et D''. On trouve ainsi

$$D = \rho \frac{U(U - 1)}{(u + a)(u + b)(u + c)}, \qquad D'' = \rho \frac{V(V - 1)}{(v + a)(v + b)(v + c)},$$

le facteur commun ρ représentant l'expression

$$\frac{xyz\,\mathrm{UV}(u-v)^2\,\Sigma ab(a-b)}{(u+a)(u+b)(u+c)(v+a)(v+b)(v+c)}.$$

On voit que l'équation (12) des asymptotiques est de la forme

$$\mathrm{F}(u)\,du^2 - \Phi(v)\,dv^2 = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

7. *Remarque.* — Il peut être avantageux, dans certains cas, de faire disparaître le signe d'intégration à la fois des trois fonctions

$$\int\frac{\mathrm{F}(u)\,du}{u+a},\qquad \int\frac{\mathrm{F}(u)\,du}{u+b},\qquad \int\frac{\mathrm{F}(u)\,du}{u+c}.$$

Il suffit à cet effet de poser

$$\mathrm{F}(u) = (u+a)(u+b)(u+c)\,\varphi'''(u)$$

et d'intégrer par parties; on trouve ainsi

$$\int\frac{\mathrm{F}(u)\,du}{u+a} = (u+b)(u+c)\,\varphi''(u) - (2u+b+c)\,\varphi'(u) + 2\varphi(u),$$

la fonction $\varphi(u)$ étant laissée arbitraire.

Cette remarque permet d'éliminer les paramètres u et v entre les relations (11) qui définissent les surfaces trouvées au n° 5, et que l'on peut, en remplaçant m_1, m_2, m_3 par a, b, c, écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\log x^{\frac{1}{a}} &= \log u + v^2\varphi'' - 2v\varphi' + 2\varphi + (b+c)(v\varphi'' - 2\varphi') + bc\varphi'',\\
\log y^{\frac{1}{b}} &= \log u + v^2\varphi'' - 2v\varphi' + 2\varphi + (c+a)(v\varphi'' - 2\varphi') + ca\varphi'',\\
\log z^{\frac{1}{c}} &= \log u + v^2\varphi'' - 2v\varphi' + 2\varphi + (a+b)(v\varphi'' - 2\varphi') + ab\varphi''.
\end{aligned}$$

Le symbole φ désigne une fonction arbitraire de v, dont les dérivées sont représentées par φ' et φ''. Des équations ci-dessus, on déduit, par des combinaisons évidentes,

$$\begin{aligned}
\log x^{\frac{b-c}{a}}\, y^{\frac{c-a}{b}}\, z^{\frac{a-b}{c}} &= \varphi''\,\Sigma bc(b-c),\\
\log x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} &= (v\varphi'' - 2\varphi')\,\Sigma a(b^2-c^2).
\end{aligned}$$

Comme $v\varphi'' - 2\varphi'$ est une fonction de φ'', nous éliminerons v en écrivant

$$(11)' \qquad x^{\frac{b-c}{a}} y^{\frac{c-a}{b}} z^{\frac{a-b}{c}} = \Phi(x^{b-c}y^{c-a}z^{a-b}),$$

le symbole Φ désignant une fonction arbitraire de son argument. Nous avons donc ce théorème : *Les lignes asymptotiques des surfaces que représente l'équation* $(11)'$ *peuvent être déterminées par deux quadratures, quelles que soient les indéterminées a, b, c, et la fonction arbitraire Φ.*

II.

8. Les surfaces (4) que nous avons obtenues tout d'abord (n° 2) sont des transformées homographiques de celles que représente l'équation

$$(17) \qquad f_1(L, M) = f_2(N, P),$$

où L, M, N, P sont quatre fonctions linéaires de x, y, z ; f_1, f_2 des fonctions homogènes et du même degré de leurs arguments respectifs. M. Jamet (*loc. cit.*) a fait connaître une propriété *caractéristique* des surfaces (17) : *Tous les plans tangents menés aux divers points d'une section faite par un plan contenant la droite* $N = 0$, $P = 0$, *coupent en un même point la droite* $L = 0, M = 0$.

Pour les transformées homographiques que nous avons considérées et qu'on peut représenter par l'équation

$$(17)' \qquad z = \frac{f(x)}{\varphi\left(\frac{y}{z}\right)},$$

cette propriété s'énonce ainsi : *Les plans tangents menés aux divers points d'une section faite par un plan contenant l'axe des x enveloppent un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan des yz.*

Il n'est pas sans intérêt de rechercher toutes les surfaces qui possèdent la propriété réciproque : *Les courbes de contact des* *cylindres circonscrits parallèlement à un plan fixe sont des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe.*

9. A cet effet, déterminons d'abord *toutes les surfaces telles que les courbes de contact des cylindres circonscrits parallèlement au plan des yz soient des courbes planes.*

Toute surface, pouvant être considérée comme l'enveloppe des cylindres qui lui sont circonscrits parallèlement au plan des yz, peut être représentée par l'équation

$$z + ay = f(x, a) \tag{18}$$

qui est celle d'un pareil cylindre et par l'équation dérivée

$$y = f'_a(x, a). \tag{19}$$

Les courbes de contact des cylindres sont les courbes $a =$ const. Écrivons que leur torsion est nulle. Il faut et il suffit pour cela qu'on ait, pour toute valeur de a,

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport à x. Cette équation se réduit à

$$y''z''' - z''y''' = 0$$

et montre que le rapport $z'' : y''$ est une fonction de a. Nous poserons

$$z''_{x^2} = \left[\frac{A(a)}{A'(a)} - a\right] y''_{x^2}.$$

Mais, comme les équations de la surface donnent

$$y''_{x^2} = f'''_{ax^2}, \qquad z''_{x^2} = f''_{x^2} - af'''_{ax^2},$$

il vient

$$f''_{x^2} = \frac{A}{A'} f'''_{ax^2},$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial a} \log f''_{x^2} = \frac{A'}{A}.$$

On déduit de là d'abord

$$f''_{x^2} = AX'',$$

X désignant une fonction arbitraire de x; puis

$$f = AX + A_1 x + A_2,$$

les lettres A, A_1, A_2 désignant trois fonctions arbitraires de a. Les solutions qu'on obtiendrait en supposant nulle soit la dérivée z'', soit la dérivée y'', rentrent dans celle-là. Ainsi, *les surfaces cherchées sont les enveloppes des cylindres* (¹)

$$(20) \qquad z + ay = AX + A_1 x + A_2.$$

Effectivement, on obtient les caractéristiques de ces cylindres en adjoignant à cette équation l'équation dérivée

$$(21) \qquad y = A'X + A'_1 x + A'_2,$$

et il est visible que ces courbes sont situées dans le plan variable

$$(22) \qquad A'z + (A'a - A)y + (AA'_1 - A'A_1)x + AA'_2 - A'A_2 = 0.$$

Nous allons maintenant exprimer que ce plan passe par une droite fixe. Il y a deux cas à distinguer suivant que la dérivée A' est nulle ou différente de zéro.

10. *Premier cas.* — Soit $A' = 0$; par suite, $A = \text{const.} = m$. Le plan de la courbe de contact du cylindre circonscrit a pour équation

$$(21)' \qquad y = A'_1 x + A'_2;$$

il ne peut contenir d'autre droite fixe, située à distance finie, qu'une parallèle à l'axe des z. Cette droite étant prise pour axe des z, on aura $A'_2 = 0$; c'est-à-dire que A_2 est une constante. En la négligeant, ce qui est permis, on obtient les surfaces enveloppes des cylindres

$$(23) \qquad z + ay = f(x, a) = mX + A_1 x,$$

pour lesquels X et A_1 sont deux fonctions arbitraires.

(¹) Si l'on suppose A_1 proportionnel à A, on obtient une classe remarquable de surfaces, dont chacune admet une série de déformations dépendant d'un paramètre arbitraire, et dans lesquelles le réseau des courbes $x = \text{const.}$, $a = \text{const.}$, reste conjugué. *Voir* le travail de M. Goursat, *Sur un problème relatif à la déformation des surfaces* (*American Journal of Mathematics*, t. XIV).

Si le plan de la courbe de contact contient une droite fixe rejetée à l'infini, il est nécessairement parallèle au plan $y=0$. Alors $A'_1=0$; soit $A_1=\text{const.}=n$; les cylindres cherchés ont pour équation

$$z+ay=f(x,a)=m\mathrm{X}+nx+A_2. \tag{24}$$

11. *Second cas.* — Soit $A'\neq 0$. Si la droite fixe est rejetée à l'infini, les plans des courbes de contact sont parallèles à un plan fixe, qu'on peut prendre pour plan des xy. Alors on a

$$A'a-A=0, \qquad A'A_1-AA'_1=0,$$

ce qui donne, avec deux constantes arbitraires m et n,

$$A=ma, \qquad A_1=mna.$$

On arrive ainsi aux cylindres

$$z+ay=f(x,a)=ma(\mathrm{X}+n)+A_2. \tag{25}$$

Si la droite fixe, située à distance finie, n'est parallèle aux génératrices d'aucun des cylindres circonscrits, on peut la prendre pour axe des x; d'où les deux relations

$$AA'_1-A'A_1=0, \qquad AA'_2-A'A_2=0,$$

qui expriment que les fonctions A_1 et A_2 ne diffèrent de A que par des facteurs constants. Dès lors, la fonction $f(x, a)$ se réduit au produit de A par une fonction de x. Or, si l'on a

$$z+ay=Af(x), \tag{26}$$

il en résulte

$$y=A'f(x), \tag{27}$$

d'où par division

$$\frac{z}{y}+a=\frac{A}{A'}.$$

Ainsi, a est une fonction du rapport $z:y$. Il en est de même de

A' et l'équation (27) prend la forme

$$y = \frac{f(x)}{\psi\left(\frac{z}{y}\right)}, \tag{27'}$$

strictement équivalente à celle des surfaces (17)'.

Supposons enfin que la droite fixe, située à distance finie, soit parallèle aux génératrices de l'un des cylindres circonscrits; nous la prendrons pour axe des y. Écrivons que le plan variable (22) contient cet axe. Nous aurons

$$A'a - A = 0, \qquad AA'_2 - A'A_2 = 0,$$

d'où par intégration

$$A = ma, \qquad A_2 = mna,$$

m et n étant deux constantes. Donc, les surfaces correspondantes sont les enveloppes des cylindres

$$z + ay = f(x, a) = maX + A_1 x, \tag{28}$$

car on peut supprimer la constante n qui s'ajouterait à la fonction arbitraire X.

12. Si l'on rapproche les cinq résultats que nous venons d'obtenir, on arrive à la conclusion suivante :

Les surfaces que leurs cylindres circonscrits parallèlement à un plan fixe touchent suivant des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe sont les enveloppes des cylindres ayant pour équation

$$z + ay = f(x, a), \tag{18}$$

où la fonction f admet l'une des deux formes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, a) = A(a)X(x), \\ f(x, a) = (ma + n)X(x) + (px + q)A(a), \end{array} \right. \tag{29}$$

les deux fonctions A, X *étant arbitraires ainsi que les quatre constantes* m, n, p, q.

Nous allons voir que *les lignes asymptotiques de chacune de ces surfaces sont déterminées par deux quadratures.*

En effet, les courbes $x =$ const., $a =$ const. formant un réseau conjugué, l'équation différentielle des asymptotiques est

$$D\, dx^2 + D''\, da^2 = 0.$$

Un calcul facile montre que, pour les surfaces enveloppes des cylindres

$$z + ay = f(x, a),$$

cette équation se réduit à

$$f''_{x^2}\, dx^2 - f''_{a^2}\, da^2 = 0,$$

et il est visible que, quand la fonction f admet l'une ou l'autre des formes (29), cette équation rentre dans le type

$$F(x)\, dx^2 - \Phi(a)\, da^2 = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

13. Voici, pour terminer, une propriété *caractéristique* des surfaces (17), étroitement liée à celle qu'a démontrée M. Jamet et que nous avons rappelée au n° **8**. Je dis que *ces surfaces présentent un réseau conjugué formé de deux familles de courbes planes, dont les plans passent par deux droites fixes.*

Soient en effet (D_1) et (D_2) les deux droites $L = M = 0$ et $N = P = 0$. Menons un plan par (D_1) et un plan par (D_2). Ces plans déterminent dans la surface des sections (C_1) et (C_2). Considérons les plans tangents menés à la surface le long de (C_2) : ils enveloppent, d'après la proposition de M. Jamet, un cône dont le sommet est en un certain point S_1 de la droite (D_1). En un point M commun à (C_1) et à (C_2), la tangente à (C_2), courbe de contact du cône (S_1), a pour conjuguée la génératrice MS_1 de ce cône, qui est tangente à la courbe (C_1). Ainsi les sections telles que (C_1) et les sections telles que (C_2) forment un réseau conjugué.

Pour établir que cette propriété caractérise les surfaces considérées, on peut montrer qu'elle entraîne la proposition de M. Jamet. A cet effet, supposons qu'il existe un réseau conjugué formé de deux familles de courbes planes dont les plans passent, pour les courbes d'une famille, par une droite (D_1), pour celles de l'autre famille, par une droite (D_2). Considérons une section plane (C_1) dont le plan passe par (D_1). Soit M un point de (C_1). Celle des courbes conjuguées de l'autre famille qui passe par M est, d'après un théorème de M. Kœnigs, la courbe de contact du cône circonscrit qui a pour sommet le point S_1, où la tangente en M à la section (C_1) rencontre la droite (D_1). Mais, par hypothèse, cette courbe (C_2) est plane et son plan passe par (D_2). Donc les plans tangents menés le long de la section plane (C_2), dont le plan contient (D_2), vont tous passer au point S_1 de la droite (D_1) : c'est la proposition de M. Jamet.

On peut aussi établir cette réciproque par un calcul direct. Prenons pour plan des xy un plan parallèle aux deux droites fixes, également distant de chacune d'elles; pour axe des z, une droite qui les rencontre. Deux plans, passant respectivement par ces deux droites, seront représentés par les équations

$$x = u(z + c), \qquad y = v(z - c), \tag{30}$$

où c est une constante. Pour qu'un point de la droite ainsi définie engendre une surface dont les sections planes $u =$ const. et $v =$ const. forment un réseau conjugué, il faut et il suffit que z soit une fonction de u et v, telle que le déterminant D' soit identiquement nul. On a ainsi l'équation

$$\begin{vmatrix} uz''_{uv} + z'_v & uz'_u + z + c & uz'_v \\ vz''_{uv} + z'_u & vz'_u & vz'_v + z - c \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit à

$$(z^2 - c^2) z''_{uv} - 2zz'_u z'_v = 0,$$

ce qui n'est autre chose que le développement de la condition

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{z - c}{z + c} = 0.$$

En conséquence, l'intégrale générale est

$$\frac{z - c}{z + c} = \frac{f(u)}{\varphi(v)}, \tag{31}$$

avec deux fonctions arbitraires. Mais si l'on tient compte des équations (30), cette relation prend la forme

$$(z-c)\varphi\left(\frac{y}{z-c}\right)=(z+c)f\left(\frac{x}{z+c}\right),$$

qui rentre visiblement dans le type (17). La propriété est donc caractéristique de cette classe de surfaces.