E. LINDELÖF

Sur les équations homogènes

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 35-39
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__35_1>

SUR LES ÉQUATIONS HOMOGÈNES;

Par M. E. Lindelöf.

Je considère l'équation linéaire

$$(1) \qquad Xf = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

où $X_1, \ldots, X_{n+1}$ sont des fonctions homogènes du même degré m. Cette équation admet $n-1$ intégrales distinctes qui sont homogènes du degré zéro. En effet, cette condition se traduit par la formule

$$(2) \qquad Af = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0.$$

Or on trouve

$$A(Xf) - X(Af) = (m-1)Xf,$$

relation qui exprime que les équations (1) et (2) forment un système complet. Elles admettent par conséquent $n-1$ intégrales communes distinctes

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_{n+1}), \quad \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n+1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

qui sont précisément les intégrales homogènes du degré zéro de l'équation (1).

En écrivant que les équations (1) et (2) sont vérifiées pour $f = \varphi_i$, et en portant dans la première des identités ainsi obtenues la valeur de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n+1}}$ fournie par la seconde, on trouve

$$\left(X_1 - \frac{x_1}{x_{n+1}} X_{n+1}\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \ldots + \left(X_n - \frac{x_n}{x_{n+1}} X_{n+1}\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Faisons ici la substitution

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = y, \qquad \frac{x_2}{x_{n+1}} = y_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{x_n}{x_{n+1}} = y_n.$$

En posant

$$X_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}^m Y_i(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$
$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \psi_k(y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et supprimant le facteur x_{n+1}^{m-1}, l'identité précédente deviendra

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (Y_1 - y_1 Y_{n+1}) \dfrac{\partial \psi_i}{\partial y_1} + \ldots + (Y_n - y_n Y_{n+1}) \dfrac{\partial \psi_i}{\partial y_n} = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{array} \right.$$

Cela posé, j'établis entre $y_1, \ldots, y_n$ les $n-1$ relations suivantes

$$(4) \qquad \psi_1 = C_1, \qquad \psi_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad \psi_{n-1} = C_{n-1},$$

en désignant par $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ des constantes arbitraires. Il s'ensuit par différentiation

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} dy_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et en rapprochant ces formules aux formules (3), on en conclut que les variables $y_1, \ldots, y_n$, liées par les relations (4), vérifient les équations différentielles

$$\frac{dy_1}{Y_1 - y_1 Y_{n+1}} = \frac{dy_2}{Y_2 - y_2 Y_{n+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n - y_n Y_{n+1}},$$

ou bien, en introduisant une variable auxiliaire t,

$$(5) \qquad \frac{dy_i}{dt} = Y_i - y_i Y_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les relations (4) nous donnent ainsi la solution générale du système (5), et nous pouvons par suite énoncer le théorème suivant :

L'intégration du système (5) *revient à la recherche des intégrales homogènes du degré zéro de l'équation* (1).

Ce résultat est la généralisation d'un théorème sur les équations différentielles à deux variables, énoncé par M. Darboux [1].

Comme application de ce qui précède, je considère le système des équations différentielles

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n + a_{i,n+1}) \\ \qquad - y_i(a_{n+1,1}y_1 + \ldots + a_{n+1,n}y_n + a_{n+1,n+1}) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

qui est analogue à l'équation de Jacobi. L'équation (1) devient dans ce cas

$$(7)\quad \begin{cases} (a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n+1}x_{n+1})\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots \\ \quad + (a_{n+1,1}x_1 + \ldots + a_{n+1,n+1}x_{n+1})\dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0, \end{cases}$$

en sorte qu'on est ramené à l'intégration d'un système linéaire à $n+1$ variables.

Considérons l'équation en λ

$$(8)\quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n+1} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dont nous désignerons les racines par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$. Dans le cas où ces racines sont distinctes, on pourra déterminer $n+1$ fonctions linéaires

$$u_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{i,n+1}x_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

telles qu'en les choisissant pour nouvelles variables l'équation (7) prenne la forme

$$\lambda_1 u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda_2 u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \ldots + \lambda_{n+1} u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}} = 0,$$

qui s'intègre immédiatement. Pour intégrales homogènes du de-

---

[1] *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bulletin des Sciences math. et astr., année 1878, p. 70.

gré zéro, on pourra choisir les suivantes

$$u_1^{\lambda_2-\lambda_3} u_2^{\lambda_3-\lambda_1} u_3^{\lambda_1-\lambda_2}, \quad u_2^{\lambda_3-\lambda_4} u_3^{\lambda_4-\lambda_2} u_4^{\lambda_2-\lambda_3}, \quad \ldots, \quad u_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n+1}} u_n^{\lambda_{n+1}-\lambda_{n-1}} u_{n+1}^{\lambda_{n-1}-\lambda_n},$$

et l'intégrale générale de l'équation proposée s'obtient, par suite, en égalant ces expressions à des constantes arbitraires, après y avoir rétabli les variables primitives à la place des u.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les racines de (8) ne sont pas distinctes. Pour fixer les idées, nous supposons $n = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \mu$. Alors l'équation (7) pourra être réduite à la forme

$$\begin{aligned} \lambda u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} &+ (\alpha u_1 + \lambda u_2) \frac{\partial f}{\partial u_2} + \mu u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} \\ &+ (\beta u_3 + \mu u_4) \frac{\partial f}{\partial u_4} + (\gamma u_3 + \delta u_4 + \mu u_5) \frac{\partial f}{\partial u_5} = 0, \end{aligned}$$

les u désignant des fonctions linéaires et homogènes des x. Cette équation admet les intégrales suivantes

$$\begin{gathered} \varphi_1 = \frac{u_2}{u_1} - \frac{\alpha}{\lambda} \log u_1, \qquad \varphi_2 = \frac{u_1^{\mu}}{u_3^{\lambda}}, \qquad \varphi_3 = \frac{u_4}{u_3} - \frac{\beta}{\mu} \log u_3, \\ \varphi_4 = \frac{u_5}{u_3} - \frac{\gamma}{\mu} \log u_3 - \frac{\delta}{\mu} \frac{u_4}{u_3} \log u_3 + \frac{\beta\delta}{2\mu^2} \log^2 u_3. \end{gathered}$$

D'autre part la condition

$$u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} + u_4 \frac{\partial f}{\partial u_4} + u_5 \frac{\partial f}{\partial u_5} = 0$$

devient, en considérant f comme fonction des φ,

$$\frac{\alpha}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + (\lambda - \mu) \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} + \frac{\gamma + \delta \varphi_3}{\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_4} = 0,$$

équation d'où l'on tire immédiatement les trois intégrales suivantes qui seront homogènes du degré zéro :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \beta \varphi_1 - \alpha \varphi_3 + \frac{\alpha\beta}{\lambda\mu} \log \varphi_2 = \beta \frac{u_2}{u_1} - \alpha \frac{u_4}{u_3}, \\ \psi_2 &= \frac{\lambda - \mu}{\alpha} \varphi_1 - \frac{1}{\lambda} \log \varphi_2 = \frac{\lambda - \mu}{\alpha} \frac{u_2}{u_1} + \log \frac{u_3}{u_1}, \\ \psi_3 &= \beta \varphi_4 - \gamma \varphi_3 - \frac{\delta}{2} \varphi_3^2 = \beta \frac{u_5}{u_3} - \gamma \frac{u_4}{u_3} - \frac{\delta}{2} \left(\frac{u_4}{u_3} \right)^2. \end{aligned}$$

La solution générale du système proposé nous sera donc donnée par les équations

$$\psi_1 = C_1, \qquad \psi_2 = C_2, \qquad \psi_3 = C_3,$$

où il faudra rétablir les variables primitives.