BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur les lignes asymptotiques

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 43-51
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__43_0>

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES;

Par M. E. Goursat.

1. Dans un élégant article publié en 1888 dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (p. 126), M. Lelieuvre a montré que les coordonnées d'un point d'une surface rapportée à ses lignes asymptotiques α, β sont données par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} x = \displaystyle\int \left(\theta_2 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} - \theta_3 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta} - \theta_3 \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right) d\beta, \\ y = \displaystyle\int \left(\theta_3 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} - \theta_1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} - \theta_1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right) d\beta, \\ z = \displaystyle\int \left(\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right) d\beta, \end{cases}$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant trois intégrales particulières d'une équation linéaire à invariants égaux (¹)

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \lambda\theta.$$

Il est facile de déduire des formules de M. Lelieuvre une infinité de surfaces pour lesquelles on connaît les expressions des coordonnées x, y, z en fonction des paramètres α, β des lignes asymptotiques, sans aucun signe de quadrature. Il suffit pour cela de partir d'une équation (2) intégrable par la méthode de Laplace. Supposons, par exemple, que l'équation (2) soit de rang $n+1$, de telle façon que l'intégrale générale ait pour expression

$$(3)\quad \theta = \mathrm{A\,F}(\alpha) + \mathrm{A}_1\mathrm{F}'(\alpha) + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{F}^{(n)}(\alpha) + \mathrm{B}\,\Phi(\beta) + \ldots + \mathrm{B}_n\Phi^{(n)}(\beta),$$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n$ étant des fonctions déterminées de α et de β, F et Φ des fonctions arbitraires. On a alors

$$(4)\quad \begin{cases} \theta_1 = \mathrm{A}f_1(\alpha) + \mathrm{A}_1 f'_1(\alpha) + \ldots + \mathrm{A}_n f_1^{(n)}(\alpha) + \mathrm{B}\varphi_1(\beta) + \mathrm{B}_1\varphi'_1(\beta) + \ldots + \mathrm{B}_n\varphi_1^{(n)}(\beta), \\ \theta_2 = \mathrm{A}f_2(\alpha) + \mathrm{A}_1 f'_2(\alpha) + \ldots + \mathrm{A}_n f_2^{(n)}(\alpha) + \mathrm{B}\varphi_2(\beta) + \mathrm{B}_1\varphi'_2(\beta) + \ldots + \mathrm{B}_n\varphi_2^{(n)}(\beta), \\ \theta_3 = \mathrm{A}f_3(\alpha) + \mathrm{A}_1 f'_3(\alpha) + \ldots + \mathrm{A}_n f_3^{(n)}(\alpha) + \mathrm{B}\varphi_3(\beta) + \mathrm{B}_1\varphi'_3(\beta) + \ldots + \mathrm{B}_n\varphi_3^{(n)}(\beta). \end{cases}$$

(¹) *Voir* aussi Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 24 et suiv.

les fonctions f_1, f_2, f_3, φ_1, φ_2, φ_3 étant toutes arbitraires. Cela posé, je dis qu'on peut mettre les fonctions arbitraires sous une forme telle que toutes les quadratures indiquées par les formules (1) puissent être effectuées. C'est ce qui se déduit aisément d'un théorème général employé par M. Darboux pour les équations à invariants égaux, et qui est d'un usage fréquent dans l'étude des équations linéaires aux dérivées partielles ([1]). Considérons les fonctions f_3, φ_3 comme données; la première des formules (1) nous donnera pour x

$$x = \int \mathrm{P}\, d\alpha + \mathrm{Q}\, d\beta,$$

où P et Q sont des expressions de la forme

$$\mathrm{P} = af_2(\alpha) + a_1 f'_2(\alpha) + \ldots + a_{n+1} f_2^{n+1}(\alpha) + b\varphi_2(\beta) + \ldots + b_{n+1}\varphi_2^{(n+1)}(\beta),$$
$$\mathrm{Q} = cf_2(\alpha) + c_1 f'_2(\alpha) + \ldots + c_{n+1} f_2^{(n+1)}(\alpha) + d\varphi_2(\beta) + \ldots + d_{n+1}\varphi_2^{(n+1)}(\beta),$$

telles que $\mathrm{P}\,d\alpha + \mathrm{Q}\,d\beta$ soit une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions f_2, φ_2. En intégrant par parties un nombre suffisant de fois, on peut ne laisser que $f_2(\alpha)$ dans le coefficient de $d\alpha$ et $\varphi_2(\beta)$ dans le coefficient de $d\beta$, de sorte que x s'écrira

$$x = \zeta + \int [\Omega f_2(\alpha) + \Psi]\, d\alpha + [\Omega' \varphi_2(\beta) + \Psi']\, d\beta,$$

Ω et Ω' ne contenant pas les fonctions arbitraires, Ψ ne contenant que $\varphi_2(\beta)$ et ses dérivées, et Ψ' ne contenant que $f_2(\alpha)$ et ses dérivées. Enfin ζ s'exprime linéairement au moyen de $f_2(\alpha)$, $\varphi_2(\beta)$ et de leurs dérivées. Comme l'expression sous le signe $\int$ doit être une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions $f_2(\alpha)$, $\varphi_2(\beta)$, il faudra que l'on ait, pour toutes les formes possibles de ces fonctions,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} f_2(\alpha) + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega'}{\partial \alpha} \varphi_2(\beta) + \frac{\partial \Psi'}{\partial \alpha}.$$

Les fonctions Ψ et Ψ' doivent être identiquement nulles; si, par exemple, Ψ n'était pas nul, $\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}$ contiendrait au moins une dé-

---

([1]) *Théorie des surfaces*, t. II, n° 393.

rivée de $\varphi_2(\beta)$, et ce terme-là ne se réduirait pas avec un autre. On aura donc $\Psi = \Psi' = 0$, et la relation précédente se réduit à

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} f_2(\alpha) = \frac{\partial \Omega'}{\partial \alpha} \varphi_2(\beta),$$

ce qui montre que Ω ne dépend que de α, tandis que Ω' ne dépend que de β. Si Ω est nul, on a

$$\int \Omega f_2(\alpha)\, d\alpha = c;$$

si Ω n'est pas nul, il suffira de poser $\Omega f_2(\alpha) = F'_2(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ étant une nouvelle fonction arbitraire, pour avoir

$$\int \Omega f_2(\alpha)\, d\alpha = F_2(\alpha).$$

On aura de même

$$\int \Omega' \varphi_2(\beta)\, d\beta = c'$$

si $\Omega' = 0$, et

$$\int \Omega' \varphi_2(\beta)\, d\beta = \Phi_2(\beta),$$

en posant $\Omega' \varphi_2(\beta) = \Phi'_2(\beta)$ si Ω' n'est pas nul. On obtiendra de même la valeur de y sans aucun signe de quadrature en remplaçant, s'il est nécessaire, les fonctions arbitraires $f_1(\alpha)$ et $\varphi_1(\beta)$ par deux nouvelles fonctions arbitraires $F_1(\alpha)$ et $\Phi_1(\beta)$.

En remplaçant maintenant θ_1 et θ_2 par leurs valeurs dans l'intégrale qui donne z, on a une expression de même forme que les précédentes, où l'on pourra considérer $F_2(\alpha)$ et $\Phi_2(\beta)$ comme données, $F_1(\alpha)$ et $\Phi_1(\alpha)$ comme des fonctions arbitraires, et le même procédé permettra de se débarrasser du signe de quadrature.

Remarquons que la même méthode permet de trouver, sans aucun signe de quadrature, les formules qui résolvent le problème de la déformation infiniment petite pour la surface représentée par les équations (1), lorsque l'équation (2) est intégrable par la méthode de Laplace.

2. Lorsque l'équation (2) se réduit à l'équation élémentaire

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0,$$

les formules (1) deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} x = \varphi_2 f_3 - f_2\varphi_3 + \int (f_2 f'_3 - f_3 f'_2)\,d\alpha - \int (\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2)\,d\beta, \\ y = \varphi_3 f_1 - f_3\varphi_1 + \int (f_3 f'_1 - f_1 f'_3)\,d\alpha - \int (\varphi_3\varphi'_1 - \varphi_1\varphi'_3)\,d\beta, \\ z = \varphi_1 f_2 - f_1\varphi_2 + \int (f_1 f'_2 - f_2 f'_1)\,d\alpha - \int (\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1)\,d\beta, \end{cases}$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions arbitraires de α, et φ_1, φ_2, φ_3 des fonctions arbitraires de β. Pour faire disparaître les quadratures, remarquons que l'on a

$$\int (f_2 f'_3 - f_3 f'_2)\,d\alpha = f_2 f_3 - 2\int f_3 f'_2\,d\alpha,$$
$$\int (f_3 f'_1 - f_1 f'_3)\,d\alpha = f_1 f_3 - 2\int f_1 f'_3\,d\alpha,$$
$$\int (f_1 f'_2 - f_2 f'_1)\,d\alpha = 2\int f_1 f'_2\,d\alpha - f_1 f_2;$$

si l'on pose

$$f_1(\alpha) = \frac{F'_1(\alpha)}{f'_2(\alpha)}, \qquad f_3(\alpha) = \frac{F'_3(\alpha)}{f'_2(\alpha)},$$

il ne reste plus qu'un signe de quadrature dans l'intégrale

$$\int \frac{F'_1(\alpha)}{f'_2(\alpha)} \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{F'_3(\alpha)}{f'_2(\alpha)}\right] d\alpha,$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{F_1(\alpha)}{f'_2(\alpha)} \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{F'_3(\alpha)}{f'_2(\alpha)}\right] - \int F_1(\alpha) \frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{1}{f'_2(\alpha)} \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{F'_3(\alpha)}{f'_2(\alpha)}\right]\right\} d\alpha,$$

et il suffira de poser

$$F_1(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{1}{f'_2(\alpha)} \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{F'_3(\alpha)}{f'_2(\alpha)}\right]\right\} = \mathcal{F}'_1(\alpha)$$

pour n'avoir plus aucune quadrature. Il restera trois fonctions arbitraires $f_2(\alpha)$, $F_3(\alpha)$, $\mathcal{F}_1(\alpha)$. On opérera de la même façon pour faire disparaître les autres quadratures.

Prenons, par exemple,

$$\theta_1 = -f'(\alpha) + \varphi'(\beta), \qquad \theta_2 = \alpha - \beta, \qquad \theta_1 = -1;$$

on trouve pour coordonnées d'un point de la surface correspondante

$$\begin{aligned}
x &= \alpha + \beta,\\
y &= f'(\alpha) + \varphi'(\beta),\\
z &= (\alpha - \beta)[f'(\alpha) + \varphi'(\beta)] - 2f(\alpha) + 2\varphi(\beta).
\end{aligned}$$

Toutes ces surfaces satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$rt - s^2 + 1 = 0;$$

les lignes asymptotiques de chacun des systèmes se projettent sur le plan des xy suivant des courbes égales qui se déduisent de l'une d'elles par une translation.

3. On peut rattacher aux considérations précédentes la solution d'un problème relatif aux lignes asymptotiques d'une surface réglée, dont M. Kœnigs a déjà donné une solution élégante ([1]). Supposons que la surface représentée par les formules (1) soit une surface réglée, et que les courbes $\alpha =$ const. soient précisément les génératrices de cette surface. On déduit de ces formules

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\theta_1}{\theta_3}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\theta_2}{\theta_3},$$

de sorte que θ_1, θ_2, θ_3 sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à la surface. Lorsque le point (x, y, z) décrit une génératrice, cette normale reste parallèle à un plan fixe, et l'on a entre θ_1, θ_2, θ_3 une relation de la forme

$$A\theta_1 + B\theta_2 + C\theta_3 = 0, \tag{6}$$

les coefficients A, B, C ne dépendant que de la variable α. Il résulte d'une proposition générale que j'ai démontrée récemment ([2]) que l'équation (2) est nécessairement du premier ou du second rang. Laissant de côté le cas où l'équation (2) est du premier rang, hypothèse qui ne donne que des surfaces réglées à plan directeur, je considère une équation du second rang de la

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVI; 1888, p. 51-54.

([2]) *Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 27 janvier 1896).

forme (2); en choisissant convenablement les variables α et β, on peut supposer que cette équation a été ramenée à la forme canonique

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{-2\theta}{(\alpha-\beta)^2}, \tag{7}$$

dont l'intégrale générale est

$$\theta = 2\frac{f(\alpha)-\varphi(\beta)}{\alpha-\beta} - f'(\alpha) - \varphi'(\beta). \tag{8}$$

Il résulte aussi de la proposition que je viens de rappeler que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ s'obtiendront en prenant la fonction arbitraire $\varphi(\beta) = 0$. On aura donc

$$\theta_1 = \frac{2f_1(\alpha)}{\alpha-\beta} - f'_1(\alpha), \qquad \theta_2 = \frac{2f_2(\alpha)}{\alpha-\beta} - f'_2(\alpha), \qquad \theta_3 = \frac{2f_3(\alpha)}{\alpha-\beta} - f'_3(\alpha), \tag{9}$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions arbitraires. Les formules (1) deviennent, toutes réductions faites,

$$\left\{\begin{aligned} x &= 2\frac{f_3f'_2 - f'_3f_2}{\alpha-\beta} + \int(f'_2f''_3 - f''_2f'_3)\,d\alpha, \\ y &= 2\frac{f_1f'_3 - f'_1f_3}{\alpha-\beta} + \int(f'_3f''_1 - f''_3f'_1)\,d\alpha, \\ z &= 2\frac{f_2f'_1 - f'_2f_1}{\alpha-\beta} + \int(f'_1f''_2 - f''_1f'_2)\,d\alpha; \end{aligned}\right. \tag{10}$$

on reconnaît immédiatement, sur ces formules, que la surface est réglée et que les courbes $\alpha = \text{const.}$ sont les génératrices. Pour faire disparaître les quadratures, remarquons qu'on a, en intégrant par parties,

$$\int(f'_2f''_3 - f''_2f'_3)\,d\alpha = 2f_2f''_3 - f'_2f'_3 - 2\int f_2f'''_3\,d\alpha,$$

$$\int(f'_3f''_1 - f''_3f'_1)\,d\alpha = f'_1f'_3 - 2f_1f''_3 + 2\int f_1f'''_3\,d\alpha,$$

$$\int(f'_1f''_2 - f''_1f'_2)\,d\alpha = 2f_1f''_2 - f'_1f'_2 - 2\int f_1f'''_2\,d\alpha,$$

et tout se réduit à mettre les fonctions arbitraires $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$,

$f_3(\alpha)$ sous une forme telle que les trois quadratures

$$\int f_2 f_3''' \, d\alpha, \quad \int f_1 f_3''' \, d\alpha, \quad \int f_1 f_2''' \, d\alpha$$

puissent être effectuées. On y arrive comme il suit : écrivons

$$f_1(\alpha) = \frac{F_1'(\alpha)}{f_3'''(\alpha)}, \qquad f_2(\alpha) = \frac{F_2'(\alpha)}{f_3'''(\alpha)},$$

$F_1(\alpha)$ et $F_2(\alpha)$ étant deux nouvelles fonctions arbitraires; il vient alors

$$\int f_1 f_3''' \, d\alpha = F_1(\alpha), \qquad \int f_2 f_3'''(\alpha) \, d\alpha = F_2(\alpha),$$

$$\int f_1 f_2''' \, d\alpha = \int \frac{F_1'(\alpha)}{f_3'''(\alpha)} \frac{d^3}{d\alpha^3} \left[\frac{F_2'(\alpha)}{f_3'''(\alpha)}\right] d\alpha,$$

ou, en intégrant encore une fois par parties,

$$\int f_1 f_2''' \, d\alpha = \frac{F_1(\alpha)}{f_3'''(\alpha)} \frac{d^3}{d\alpha^3}\left(\frac{F_2'}{f_3'''}\right) - \int F_1(\alpha) \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{f_3'''} \frac{d^3}{d\alpha^3}\left(\frac{F_2'}{f_3'''}\right)\right] d\alpha,$$

et il suffira de poser

$$F_1(\alpha) \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{f_3'''} \frac{d^3}{d\alpha^3}\left(\frac{F_2'}{f_3'''}\right)\right] = \mathfrak{F}_1'(\alpha)$$

pour n'avoir plus aucun signe de quadrature. Les fonctions arbitraires qui figurent dans les nouvelles formules sont

$$\mathfrak{F}_1(\alpha), \quad F_2(\alpha), \quad f_3(\alpha).$$

4. Si la surface (S) est du second degré, l'équation (2) est encore du rang *deux,* sauf dans le cas du paraboloïde, que nous laisserons de côté, et les trois intégrales particulières θ_1, θ_2, θ_3 doivent vérifier deux relations de la forme

$$(11) \qquad \begin{cases} A(\alpha)\theta_1 + B(\alpha)\theta_2 + C(\alpha)\theta_3 = 0, \\ A_1(\beta)\theta_1 + B_1(\beta)\theta_2 + C_1(\beta)\theta_3 = 0. \end{cases}$$

L'équation (2) ayant été mise sous la forme normale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{-2\theta}{(\alpha - \beta)^2},$$

on obtiendra trois intégrales θ_1, θ_2, θ_3 satisfaisant à des relations de la forme (11) en prenant, dans la formule qui donne l'intégrale générale,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= a_1\alpha^2 + 2b_1\alpha + c_1, & \varphi_1(\beta) &= 0, \\ f_2(\alpha) &= a_2\alpha^2 + 2b_2\alpha + c_2, & \varphi_2(\beta) &= 0, \\ f_3(\alpha) &= a_3\alpha^2 + 2b_3\alpha + c_3, & \varphi_3(\beta) &= 0, \end{aligned}$$

a_1, a_2, a_3, ..., c_3 étant des constantes. On trouve ainsi

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= 2\,\frac{a_1\alpha\beta + b_1(\alpha+\beta) + c_1}{\alpha-\beta}, \\ \theta_2 &= 2\,\frac{a_2\alpha\beta + b_2(\alpha+\beta) + c_2}{\alpha-\beta}, \\ \theta_3 &= 2\,\frac{a_3\alpha\beta + b_3(\alpha+\beta) + c_3}{\alpha-\beta}. \end{aligned} \right.$$

On obtiendrait les mêmes expressions de θ_1, θ_2, θ_3 en prenant

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, & \varphi_1 &= -(a_1\beta^2 + 2b_1\beta + c_1), \\ f_2 &= 0, & \varphi_2 &= -(a_2\beta^2 + 2b_2\beta + c_2), \\ f_3 &= 0, & \varphi_3 &= -(a_3\beta^2 + 2b_3\beta + c_3). \end{aligned}$$

Les trois intégrales particulières θ_1, θ_2, θ_3 vérifient donc les deux relations

$$\begin{vmatrix} \theta_1, & a_1\alpha^2 + 2b_1\alpha + c_1, & a_1\alpha + b_1 \\ \theta_2, & a_2\alpha^2 + 2b_2\alpha + c_2, & a_2\alpha + b_2 \\ \theta_3, & a_3\alpha^2 + 2b_3\alpha + c_3, & a_3\alpha + b_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \theta_1, & a_1\beta^2 + 2b_1\beta + c_1, & a_1\beta + b_1 \\ \theta_2, & a_2\beta^2 + 2b_2\beta + c_2, & a_2\beta + b_2 \\ \theta_3, & a_3\beta^2 + 2b_3\beta + c_3, & a_3\beta + b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

on en conclut aisément que le plan représenté par l'une ou l'autre de ces équations reste tangent à un cône du second degré, comme cela doit être.

Les formules (10) deviennent, en négligeant une constante que l'on peut toujours ajouter à x, y, z,

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= 4\,\frac{(a_2b_3 - a_3b_2)\alpha\beta + \dfrac{a_2c_3 - a_3c_2}{2}(\alpha+\beta) + b_2c_3 - c_2b_3}{\alpha-\beta}, \\ y &= 4\,\frac{(a_3b_1 - a_1b_3)\alpha\beta + \dfrac{a_3c_1 - a_1c_3}{2}(\alpha+\beta) + b_3c_1 - c_3b_1}{\alpha-\beta}, \\ z &= 4\,\frac{(a_1b_2 - a_2b_1)\alpha\beta + \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{2}(\alpha+\beta) + b_1c_2 - c_1b_2}{\alpha-\beta}. \end{aligned} \right.$$

Les formules qui définissent une surface (S_1) correspondant à la surface du second degré par orthogonalité des éléments deviennent de même, après réduction,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{4(a_1\beta+b_1)F(\alpha)-4(a_1\alpha+b_1)\Phi(\beta)-2[a_1\alpha\beta+b_1(\alpha+\beta)+c_1][F'(\alpha)-\Phi'(\beta)]}{\alpha-\beta},\\ y_1 &= \frac{4(a_2\beta+b_2)F(\alpha)-4(a_2\alpha+b_2)\Phi(\beta)-2[a_2\alpha\beta+b_2(\alpha+\beta)+c_2][F'(\alpha)-\Phi'(\beta)]}{\alpha-\beta},\\ z_1 &= \frac{4(a_3\beta+b_3)F(\alpha)-4(a_3\alpha+b_3)\Phi(\beta)-2[a_3\alpha\beta+b_3(\alpha+\beta)+c_3][F'(\alpha)-\Phi'(\beta)]}{\alpha-\beta},\end{aligned}\right.$$

$F(\alpha)$ et $\Phi(\beta)$ étant deux fonctions arbitraires.