Bulletin de la S. M. F.

M. D'Ocagne

Sur la représentation monographique des équations du second degré à trois variables

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 81-84

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__81_0>

SUR LA REPRÉSENTATION NOMOGRAPHIQUE DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A TROIS VARIABLES;

Par M. MAURICE D'OCAGNE.

Soit l'équation du second degré à trois variables la plus générale

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} & a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_3^2 + 2b_1\alpha_2\alpha_3 + 2b_2\alpha_3\alpha_1 \\ & \quad + 2b_3\alpha_1\alpha_2 + 2c_1\alpha_1 + 2c_2\alpha_2 + 2c_3\alpha_3 + d = 0. \end{aligned}\right.$$

Je vais démontrer que *la condition* NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE *pour que cette équation soit représentable par un abaque formé d'un système de cercles et de deux systèmes de droites parallèles est que l'équation* (I), *où les variables* α_1, α_2, α_3 *sont prises pour des coordonnées courantes, définisse une surface coupée par l'un au moins des plans de coordonnées suivant une ellipse, d'ailleurs réelle ou imaginaire.*

Supposons que nous puissions mettre l'équation (I) sous la forme

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} & (k_3\alpha_2 + k_2\alpha_3)^2 + (h_3\alpha_2 + h_2\alpha_3)^2 + 2(h_1\alpha_1 + k_1)(k_3\alpha_2 + k_2\alpha_3) \\ & \quad + 2(h'_1\alpha_1 + k'_1)(h_3\alpha_2 + h_2\alpha_3) + \rho(a_1\alpha_1^2 + 2c_1\alpha_1 + d) = 0, \end{aligned}\right.$$

les h et les k étant des coefficients à déterminer, ρ un paramètre dont nous disposerons arbitrairement.

Nous poserons alors

$$(1)\qquad x = k_3\alpha_2 + k_2\alpha_3, \qquad\qquad y = h_3\alpha_2 + h_2\alpha_3, \qquad (2)$$

et nous n'aurons qu'à éliminer d'abord α_2 et α_3 entre (II), (1) et (2), puis, respectivement, α_2 et α_3 entre (1) et (2) pour obtenir les équations des trois systèmes d'isoplèthes suivants pour l'équation (II), c'est-à-dire pour (I),

$$(\alpha_1)\quad x^2 + y^2 + 2(h_1\alpha_1 + k_1)x + 2(h'_1\alpha_1 + k'_1)y + \rho(a_1\alpha_1^2 + 2c_1\alpha_1 + d) = 0,$$

$$(\alpha_2)\qquad h_2x - k_2y = (h_2k_3 - h_3k_2)\alpha_2,$$

$$(\alpha_3)\qquad h_3x - k_3y = (h_3k_2 - h_2k_3)\alpha_3.$$

Le système (α_1) est, on le voit, composé de cercles ayant leurs centres en ligne droite et dont l'enveloppe est une conique. Les systèmes (α_2) et (α_3) sont composés de droites de direction constante dans chacun d'eux.

L'équation (1) sera donc représentable par un abaque ainsi constitué chaque fois qu'on pourra déterminer, pour les coefficients h et k, des valeurs *réelles* rendant (II) identique à (I).

L'identification de ces deux équations donne

$$k_3^2 + h_3^2 = \rho a_2, \tag{3}$$
$$k_2^2 + h_2^2 = \rho a_3, \tag{4}$$
$$k_2 k_3 + h_2 h_3 = \rho b_1, \tag{5}$$
$$h_1 k_2 + h'_1 h_2 = \rho b_2, \tag{6}$$
$$h_1 k_3 + h'_1 h_3 = \rho b_3, \tag{7}$$
$$k_1 k_3 + k'_1 h_3 = \rho c_2, \tag{8}$$
$$k_1 k_2 + k'_1 h_2 = \rho c_3. \tag{9}$$

Les trois premières de ces équations ne contiennent que les quatre inconnues h_2, k_2, h_3, k_3. Nous allons voir si nous pouvons disposer de l'une de ces inconnues, de façon que ces équations nous donnent des valeurs réelles pour les trois autres. Une fois que nous aurons obtenu ces quatre coefficients, les équations (6) et (7) nous donneront linéairement h_1 et h'_1, et les équations (8) et (9), k_1 et k'_1.

Tout revient donc à résoudre le système des équations (3), (4) et (5), en se donnant arbitrairement l'une des inconnues, k_3 par exemple.

L'équation (3) donne d'abord

$$h_3 = \sqrt{\rho a_2 - k_3^2}.$$

Cela exige que

$$\rho a_2 - k_3^2 > 0,$$

inégalité à laquelle on peut toujours satisfaire puisque la valeur de ρ est choisie arbitrairement. On voit que ρ devra nécessairement avoir le même signe que a_2.

Éliminant maintenant h_2 entre (4) et (5), on obtient, en tenant compte de (3), l'équation

$$a_2 k_2^2 - 2 b_1 k_3 k_2 + \rho(b_1^2 - a_2 a_3) + a_3 k_3^2 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait des racines réelles est

$$b_1^2 k_3^2 - a_2[\rho(b_1^2 - a_2 a_3) + a_3 k_3^2] > 0$$

ou

$$(k_3^2 - a_2 \rho)(b_1^2 - a_2 a_3) > 0.$$

Or, nous venons de voir que le premier de ces deux facteurs doit nécessairement être négatif. Il faut donc que le second le soit aussi, c'est-à-dire que

$$b_1^2 - a_2 a_3 < 0,$$

ce qui exprime que la surface définie par l'équation (I) est coupée par le plan $\alpha_1 = 0$ suivant une courbe du genre elliptique.

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution réelle. Mais, si elle est remplie, on voit que l'on peut donner à k_3 une valeur quelconque. Nous prendrons

$$k_3 = 0.$$

Dès lors les équations (3) à (9) donnent successivement

$$h_3 = \sqrt{\rho a_2},$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\rho}{a_2}}\, b_1,$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\rho}{a_2}}(a_2 a_3 - b_1^2),$$

$$h'_1 = \sqrt{\frac{\rho}{a_2}}\, b_3,$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{\rho}{a_2}}\, \frac{a_2 b_2 - b_1 b_3}{\sqrt{a_2 a_3 - b_1^2}},$$

$$k'_1 = \sqrt{\frac{\rho}{a_2}}\, c_3,$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho}{a_2}}\, \frac{a_2 c_3 - b_1 c_2}{\sqrt{a_2 a_3 - b_1^2}}.$$

Portant les valeurs de ces coefficients dans les équations des isoplèthes (α_1), (α_2) et (α_3), on obtient

$$(\alpha_1)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2+y^2+2\sqrt{\frac{\rho}{a_2(a_2a_3-b_1^2)}}[(a_2b_2-b_1b_3)\alpha_1+a_2c_3-b_1c_2)]x \\ & \qquad +2\sqrt{\frac{\rho}{a_2}}(b_3\alpha_1+c_2)y+\rho(a_1\alpha_1^2+2c_1\alpha_1+d)=0, \end{aligned}\right.$$

$$(\alpha_2)\qquad b_1x-\sqrt{a_2a_3-b_1^2}\,y=-\sqrt{\rho a_2(a_2a_3-b_1^2)}\,\alpha_2,$$

$$(\alpha_3)\qquad x=\sqrt{\frac{\rho(a_2a_3-b_1^2)}{a_2}}\,\alpha_3.$$

A titre de vérification, prenons l'équation

$$\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\alpha_2^2}{b^2}+\frac{\alpha_3^2}{c^2}-1=0.$$

Nous avons ici

$$a_1=\frac{1}{a^2},\qquad a_2=\frac{1}{b^2},\qquad a_3=\frac{1}{c^2},$$

$$b_1=b_2=b_3=c_1=c_2=c_3=0,\qquad d=-1.$$

Prenons, en outre, $\rho=a^2$.

Les équations des isoplèthes deviennent alors

$$(\alpha_1)\qquad x^2+y^2+\alpha_1^2-a^2=0,$$

$$(\alpha_2)\qquad y=\frac{a}{b}\alpha_2,$$

$$(\alpha_3)\qquad x=\frac{a}{c}\alpha_3.$$

La vérification est immédiate.