BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 97-101
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__97_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 MAI 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KOENIGS.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société :

M. Pruvost, présenté par MM. Darboux et Appell; M. L. Cosserat, présenté par MM. Kœnigs et E. Cosserat; M. Fontaneau, présenté par MM. Lemoine et Kœnigs; M. Sanchez, présenté par MM. Tisserand et Goursat; MM. Rougier et Jacquet, présentés par MM. Appell et Kœnigs; M. Tresse, présenté par MM. Bourlet et Beudon; M. Greenhill, présenté par MM. Emile Picard et D. André.

Communications :

M. Laisant résume une Note, adressée par M. Shunkichi Kimura, de Tokio (Japon), ayant pour titre : *Certaines applications des quaternions,* et qui, étant rédigée en anglais, ne peut être insérée au *Bulletin*.

La première application étudiée par l'auteur se rapporte au mouvement d'un point sur une surface; on suppose que la force dérive d'un potentiel, et l'on demande que le mouvement s'effectue sur une trajectoire orthogonale des intersections de la surface donnée avec les surfaces de niveau. On trouve très simplement que la trajectoire est une géodésique de la surface donnée. L'auteur rappelle que ce problème a été étudié par Liouville et par M. de Saint-Germain.

La seconde application concerne l'épaisseur de la couche comprise entre deux positions voisines d'une surface fermée, question qui intervient dans la théorie du magnétisme. M. Kimura traite en particulier le cas de l'ellipsoïde à l'aide de calculs notablement plus simples que par les coordonnées cartésiennes.

SÉANCE DU 20 MAI 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KŒNIGS.

Communications :

M. Fleury : *Sur les séries.*

M. Kœnigs : *Sur les mouvements périodiques d'un corps pesant autour d'un point fixe.*

M. Laisant : *Sur une génération du triangle de Pascal.*

M. D'OCAGNE communique un *théorème relatif à la théorie des abaques,* dont voici l'énoncé :

Toute équation représentable par trois systèmes du premier degré de droites isoplèthes est de la forme

$$A\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + A_{12}\alpha_1\alpha_2 + A_{23}\alpha_2\alpha_3 + A_{31}\alpha_3\alpha_1 + A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_0 = 0,$$

mais ce n'est pas l'équation la plus générale de ce type. Le caractère algébrique de ces équations est le suivant : le discriminant de la forme du premier membre rendue homogène est positif.

Dans le cas où $A = 0$, *l'équation, où l'on considère* α_1, α_2 *et* α_3 *comme des coordonnées courantes, représente un hyperboloïde à une nappe.*

M. MANGEOT adresse la Note suivante :

Sur une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche.

Soient γ une courbe gauche; m un point donné de la courbe; R et T ses rayons de courbure et de torsion en ce point; mx, my, mz trois axes rectangulaires issus de m, le premier touchant γ en m; x, y, z les coordonnées d'un point variable p de γ par rapport à ces axes.

Je regarde x comme la variable indépendante.

On a, au point m,

$$x = y = z = 0,$$
$$dx = dy = 0.$$

et, par suite,

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0^2}},$$

$$T = \pm \frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0^2}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)_0 - \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0};$$

l'indice o désigne les valeurs que prennent au point m les dérivées qui en sont affectées.

Construisons, dans un plan, le point P qui a pour coordonnées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ par rapport à deux axes rectangulaires OX, OY, choisis à volonté dans ce plan. Lorsque le point p décrit la courbe γ, le point P décrit dans le plan XOY une certaine courbe Γ passant à l'origine O. Le rayon de courbure ρ de la courbe Γ, en ce point O qui correspond au point m de γ, a pour valeur

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)_0 - \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0}.$$

En comparant les trois formules précédentes, on voit que l'on doit avoir

$$T = \rho R.$$

De là une proposition qui peut s'énoncer ainsi :

Étant données une courbe gauche γ, et une de ses tangentes mt, la touchant en m, si l'on mène par cette droite deux plans rectangulaires Π, Π' *puis que l'on construise, dans un plan arbitraire, une courbe* Γ *ayant pour coordonnées rectangulaires les tangentes des angles v, v' que fait mt avec les projections sur* Π *et* Π' *d'une tangente quelconque de γ, le rayon de courbure de* Γ*, à l'origine des coordonnées, mesuré avec l'unité de longueur qui a servi pour la construction de* Γ, *sera égal au rapport de la courbure de γ à sa torsion, au point m.*

Si l'unité de longueur en question est prise égale au rayon de courbure R de γ, ce qui revient à dire que l'on prend les formules

$$X = R \operatorname{tang} v, \qquad Y = R \operatorname{tang} v',$$

pour construire la courbe Γ, la courbure de Γ représentera exactement la torsion de γ.

La proposition que je viens d'indiquer peut être énoncée sous cette autre forme :

Les équations $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ étant censées représenter, en axes rectangles Ox, Oy, Oz, une courbe à double courbure touchant l'axe des x au point O, si on les différentie relativement à x, ce qui donne les formules

$$f'_x + y' f'_y + z' f'_z = 0, \qquad \varphi'_x + y' \varphi'_y + z' \varphi'_z = 0,$$

puis que l'on élimine x, y, z entre les quatre équations précédentes, la relation obtenue, où l'on regarderait y' et z' comme les coordonnées rectangulaires d'un point, définit une courbe plane dont le rayon de courbure à l'origine est égal au rapport des rayons de torsion et de courbure de la courbe gauche, au point O.

Regardons encore y' et z' comme les rapports de deux coordonnées d'un point de l'espace à la troisième. Alors le lieu des points de l'espace, pour lesquels les quatre équations précédentes sont vérifiées simultanément, est un cône, dont l'interprétation conduit à ce théorème de Géométrie :

Lorsqu'un point se déplace sur une génératrice G *d'un cône quelconque, le rayon de courbure principal du cône en ce point varie proportionnellement à sa distance au sommet du cône, et le coefficient de proportionnalité est égal au rapport de la première à la seconde courbure d'une courbe quelconque ayant ses tangentes parallèles aux génératrices du cône, ces courbures étant relatives au point où la tangente est parallèle à* G.

Voici quelques conséquences de ce théorème :

1° La loi de variation du rapport des courbures d'une courbe gauche, aux différents points de la courbe, est la même que celle du rayon principal d'un cône en un point qui reste à une distance constante du sommet, et ce cône est celui dont les génératrices sont parallèles aux tangentes de la courbe;

2° Pour que, tout le long de la courbe, le rapport des deux courbures soit constant, il faut et il suffit que le cône correspondant soit de révolution, c'est-à-dire que la courbe soit une hélice : résultat d'ailleurs bien connu;

3° Quand une droite mobile engendre une développable, on peut connaître le rapport des courbures en un point de l'arête de rebroussement sans connaître ni cette courbe ni la position du point.

SÉANCE DU 3 JUIN 1896.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Lucien Lévy : *Sur un essai récent de démonstration du postulatum d'Euclide.*

M. D. André : *Théorème nouveau de réversibilité algébrique.*

M. L. Lecornu : *Sur le problème de l'escarpolette.*

M. Carvallo : *Généralisation et extension à l'espace du théorème de Cauchy sur le résidu relatif à un pôle.*

M. Carvallo communique, de la part de M. Larose, une *Démonstration du théorème de M. Vaschy, sur une distribution quelconque de vecteur.*

SÉANCE DU 17 JUIN 1896.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. Touche : *Sur le mouvement d'un disque dans un fluide.*

M. Painlevé : *Sur le frottement des solides entre eux.*
