BULLETIN DE LA S. M. F.

J. BEUDON

Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 108-120
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__108_1>

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. Jules Beudon.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences ([1]), j'ai indiqué rapidement une extension de la notion de caractéristique aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier et à plus de deux variables indépendantes. Je me propose de donner ici la démonstration des faits que j'ai énoncés; mais j'indiquerai auparavant une terminologie qui nous sera d'une grande utilité ([2]).

([1]) J. Beudon, *Sur les singularités des équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus des séances*, t. CXXIV, 29 mars 1897).

([2]) *Voir*, pour plus de détail, J. Beudon, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres* (*Annales de l'École Normale*, Supplément, 1896).

Si z est une fonction analytique de n variables $x_1, \ldots, x_n$, on a entre les dérivées de z des relations de la forme

$$(a) \qquad d\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_i^{\alpha_{i}+1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_i \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k).$$

On peut considérer les quantités $x_1, \ldots, x_n, z, \dfrac{\partial^k z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ (k variant de o à p) comme des variables indépendantes; on appelle *élément d'ordre p de l'espace à $n+1$ dimensions* tout système de valeurs attribuées à ces lettres.

Deux éléments infiniment voisins qui vérifient ces relations sont dits *unis*.

Tout système d'équation entre les coordonnées d'un élément qui vérifie les équations (a) définit une multiplicité M^p; dans chacun de ces systèmes, il y a quelques relations entre $x_1, \ldots, x_n, z$ seulement, qui définissent une multiplicité ponctuelle, dite le *support* de M_p.

Il y a des multiplicités M^p telles qu'à chaque point du support ne correspond qu'un élément d'ordre p; si q est le nombre des dimensions du support, nous les appellerons les *multiplicités* M_q^p.

1. Considérons d'abord une équation aux dérivées partielles linéaire par rapport aux dérivées du second ordre; soit

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} p_{ik} + \varphi = 0 = \Phi, \qquad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k},$$

où les A_{ik} et φ sont des fonctions données de $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ une telle équation.

On sait, d'après les théorèmes généraux de Cauchy sur l'existence des intégrales dans les systèmes différentiels, que toute intégrale analytique de cette équation peut être définie en se donnant une multiplicité M_{n-1}^1 qu'elle doive contenir; les équations suivantes

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où z, x_n et p_n sont des fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, représentent une multiplicité M_{n-1}^1.

Pour calculer les dérivées secondes en fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, il faut faire usage des formules

$$(3) \qquad \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} = p_{\rho i} + p_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad \begin{pmatrix} \rho = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit

$$(4) \qquad p_{\rho n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} - p_{nn} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},$$

$$(5) \qquad p_{\rho i} = \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + p_{nn} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho};$$

en portant dans l'équation proposée (1) on obtient finalement

$$\left(\sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} A_{\rho i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + A_{nn} \right) p_{nn}$$
$$+ \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} A_{\rho i} \left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} \right) - \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + \varphi = 0.$$

Pour qu'il y ait indétermination on doit avoir

$$(6) \qquad \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} A_{\rho i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + A_{nn} = 0,$$

$$(7) \qquad \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} A_{\rho i} \left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} \right) - \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + \varphi = 0.$$

Je donnerai le nom de *multiplicités singulières* M_{n-1}^1 aux multiplicités définies par les équations (2), (6) et (7). Il est facile de voir, en restant dans les circonstances générales, quel est leur degré de généralité. Si l'on choisit en effet x_n arbitrairement en fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, l'équation (6) permettra d'obtenir p_n, et par suite $p_1, \ldots, p_{n-1}$; en remplaçant, dans l'équation (7), ces lettres par leurs valeurs, on aura une équation aux dérivées partielles du second ordre et linéaire pour définir z.

Si l'on connaît une surface intégrale de l'équation (1), les supports des multiplicités singulières placées sur cette surface intégrale sont définis par l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (6), et les orientations d'éléments du premier ordre de ces multiplicités singulières par l'équation (7); ces deux équations ont, comme il est facile de le voir, les mêmes caractéristiques.

Nous verrons prochainement que ces caractéristiques ont une grande importance.

2. J'effectue maintenant un changement de variables laissant $x_1, \ldots, x_{n-1}$ inaltérées, mais tel que x_n devienne une fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et de la nouvelle variable y; j'aurai les formules (2), (3) et

$$(9) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = p_n \frac{\partial x_n}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p_\rho}{\partial y} = p_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial y},$$

d'où les conditions d'intégrabilité

$$(9) \qquad \frac{\partial p_{\rho i}}{\partial y} = \frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial y} - \frac{\partial p_{\rho n}}{\partial y} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad \begin{pmatrix} \rho = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

J'en déduis les relations

$$(10) \qquad \frac{\partial p_{\rho i}}{\partial y} = \frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial y} - \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial y} + \frac{\partial p_{nn}}{\partial y} \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}.$$

Dans ces conditions, $z, x_n, p_1, \ldots, p_n$ sont des fonetions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et de y; je détermine le changement de variables de telle sorte que ces fonctions représentent une multiplicité singulière M_{n-1}^1 quelle que soit la valeur attribuée à y. Supposons que l'on ait une multiplicité singulière pour $y = y_0$; l'équation (1) est alors vérifiée; je vais écrire que la dérivée de son premier membre par rapport à y est nul.

Pour simplifier les notations, je poserai

$$\frac{d}{dx_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial z} p_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i} p_{in}.$$

J'aurai alors, en tenant compte des équations (9) et (10),

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial p_{nn}}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + A_{nn} \right) \\ + \frac{\partial x_n}{\partial y} \Bigg[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho i} \left(\frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} \right) \\ + \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \frac{dA_{ik}}{dx_n} + \frac{d\varphi}{dx_n} \Bigg]. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\frac{\partial p_{nn}}{\partial y}$ est nul par hypothèse, et comme $\frac{\partial x_n}{\partial y}$ n'est pas identiquement nul, on a

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho i} \left(\frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} \right) \\ & + \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \frac{dA_{ik}}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}. \end{aligned} \right.$$

3. Je dis que l'équation (11) représente la condition que doit vérifier l'orientation des éléments du second ordre de toute intégrale qui contient la multiplicité M_{n-1}^1, sur cette multiplicité singulière. Pour démontrer ce fait, je vais chercher à calculer les valeurs des dérivées du troisième ordre; je poserai auparavant la notation

$$\frac{d}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial z} p_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i} p_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

L'équation proposée, différentiée par rapport à x_j, donne

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} p_{ikj} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \frac{dA_{ik}}{dx_j} + \frac{d\varphi}{dx_j} = 0.$$

Remarquons que l'on a, sur la multiplicité M_{n-1}^1,

$$(13)\qquad \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} = p_{ikj} + p_{ikn} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \qquad \left(\begin{matrix} i, k = 0, 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix} \right);$$

ces relations permettent de calculer tous les p_{ikj} en fonction de p_{nnn}; en portant dans l'équation (12) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{ik} & \left\{ \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \left[\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_k} - p_{nnn} \frac{\partial x_n}{\partial x_k} \right) \right] \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} A_{in} \left[\frac{\partial p_{in}}{\partial x_j} - \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_i} - p_{nnn} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \right) \right] \\ & + A_{nn} \left(\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_j} - p_{nnn} \frac{\partial x_n}{\partial y_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{dA_{ik}}{dx_j} p_{ik} + \frac{d\varphi}{dx_j} = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de p_{nnn} dans cette équation est précisément le premier membre de l'équation (6) : il est nul, puisque nous sommes sur une multiplicité singulière M^1_{n-1} ; le coefficient de $\frac{\partial x_n}{\partial x_j}$ est le premier membre de l'équation (11), que nous supposons vérifiée ; il reste finalement

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} A_{ik}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n-1} A_{in}\frac{\partial p_{in}}{\partial x_j}+A_{nn}\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\frac{dA_{ik}}{dx_j}+\frac{d\varphi}{dx_j}=0.$$

Cette équation est vérifiée, puisque les éléments du second ordre, tirés des formules (2) et (3), satisfont identiquement à l'équation proposée quand on est placé sur une multiplicité singulière. Nous avons donc établi que, si l'orientation des éléments du second ordre choisi sur la multiplicité singulière vérifie l'équation (11), il y a indétermination pour le calcul des dérivées du troisième ordre.

4. Les équations (2), (3), (6), (7) et (11) définissent une famille de multiplicités M^2_{n-1} que j'appellerai *multiplicités singulières* M^2_{n-1} ; si l'on adjoint les formules (13), on obtient une infinité de multiplicités M^3_{n-1} qui vérifient l'équation proposée et ses dérivées ; mais elles ne sont pas toutes placées sur une multiplicité intégrale à n dimensions. Pour rechercher dans quelles conditions cette circonstance se présentera, je ferai un changement de variables analogue à celui qui a été employé au n° 2 ; c'est-à-dire tel que x_n, z, p_i, p_{ik}, p_{ikj} étant des fonctions de $x_1, \dots, x_{n-1}$ et de la nouvelle variable y, on ait affaire à des multiplicités singulières M^2_{n-1} quel que soit y.

Je dois adjoindre les formules

$$\frac{\partial p_{\rho i}}{\partial x_k}=p_{\rho ik}+p_{\rho in}\frac{\partial x_n}{\partial x_k} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p_{\rho i}}{\partial y}=p_{\rho in}\frac{\partial x_n}{\partial y}.$$

Dans ces conditions, on aura

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_j}=0,$$

car nos multiplicités M^3_{n-1} vérifient identiquement les équations

(12); pour que ceci ait lieu, quel que soit y, il faut

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial x_j} + \frac{\partial x_n}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x\, \partial y_j} = 0.$$

Or, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$ est vérifié identiquement; il suffit donc que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial y} = 0.$$

Voici ce que l'on obtient, en tenant compte des conditions d'intégrabilité :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_{ik}\left(\frac{\partial p_{knn}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial p_{nnn}}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_{in}\frac{\partial p_{nnn}}{\partial x_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d\mathrm{A}_{ik}}{dx_n}p_{ikn} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2\mathrm{A}_{ik}}{dx_n^2}p_{ik} + \frac{d^2\varphi}{dx_n^2} = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'on pose

$$\frac{df}{dx_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z}p_n + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_i}p_{in} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_{ij}}p_{ijn}.$$

L'équation (14) jointe aux équations (13) exprime la condition pour que les multiplicités M_{n-1}^3 soient contenues dans des multiplicités intégrales à n dimensions; on le vérifierait en constatant qu'il y a alors indétermination pour les éléments du quatrième ordre; nous obtenons ainsi des *multiplicités* M_{n-1}^3 *singulières*.

En opérant ainsi de proche en proche, on démontrerait l'existence de *multiplicités* M_{n-1}^p *singulières* pour toutes les valeurs de l'ordre p; on verrait aussi que, une multiplicité singulière M_{n-1}^3 étant choisie, l'ensemble des multiplicités M_{n-1}^{p+1} qui lui correspond dépend d'une fonction arbitraire de $n - 2$ arguments.

Nous démontrerons un peu plus loin que ces multiplicités singulières contiennent bien des multiplicités intégrales, c'est-à-dire que les conditions précédentes que nous avons reconnues nécessaires sont bien suffisantes.

5. J'envisage maintenant une équation aux dérivées partielles du second ordre non linéaire; pour plus de simplicité, je supposerai qu'elle est rationnelle par rapport aux lettres qui y figurent;

soit

$$(15) \qquad f(x_1, \ldots, x_n, z, p_i, p_{ik}) = 0$$

cette équation. Le degré de généralité est défini de la même façon que pour les équations linéaires, c'est-à-dire par les formules (2). Pour calculer les dérivées du second ordre, nous ferons usage des formules (3); pour qu'il y ait indétermination il faut que

$$(16) \qquad \sum_{\rho=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{\rho i}}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{\rho n}}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + \frac{\partial f}{\partial p_{nn}} = 0;$$

mais cette condition, qui est nécessaire, n'est plus suffisante. Si l'équation (16) ne renferme plus p_{nn}, la discussion s'achève comme pour les équations linéaires; nous supposerons donc qu'il n'en est pas ainsi.

Les équations (2), (3), (15) et (16) définissent une famille de multiplicités M_{n-1}^2; mais ces multiplicités ne sont pas toutes placées sur des multiplicités intégrales à n dimensions de l'équation proposée. Pour reconnaître dans quels cas cela aura lieu, nous ferons encore usage du changement de variables qui nous a été si utile, et nous trouvons, par un calcul que j'omets, que l'on doit avoir

$$(17) \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{\partial f}{\partial p_\rho} p_{\rho n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n \\ &\qquad + \sum_{\rho=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{\rho i}}\left(\frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_{1i}} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho}\right) + \sum_{\rho=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_{\rho n}}\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (2), (3), (15), (16) et (17) définissent une famille de multiplicités que j'appellerai les *multiplicités singulières* M_{n-1}^2. On vérifierait tout à fait de la même manière que plus haut l'indétermination dans le calcul des dérivées du troisième ordre, et l'on démontrerait l'existence de *multiplicités singulières* M_{n-1}^p pour toutes les valeurs de p.

Une multiplicité M_{n-1}^p singulière étant donnée, les multiplicités singulières M_{n-1}^{p+1} qui lui correspondent dépendent d'une fonction arbitraire de $n-2$ arguments.

6. Il me reste maintenant à établir que, étant donnée une multiplicité singulière M_{n-1}^2, il y a bien une infinité de multiplicités intégrales à n dimensions qui la contiennent ([1]). Je puis toujours effectuer un changement de variables tels que le support de cette multiplicité singulière ait pour équations

$$z = 0, \qquad x_n = 0;$$

on a par suite

$$p_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_n = 0, \qquad p_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

$$p_{\rho i} = 0 \quad (\rho, i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad p_{ni} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad p_{nn} = \varphi(x_1, \ldots x_{n-1}),$$

et si l'on pose

$$z = z' + x_n f + \frac{x_n^2 \varphi}{2},$$

on est ramené à

$$z = 0, \qquad x_n = 0, \qquad p_i = 0, \qquad p_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme on a affaire à une multiplicité singulière, les équations (16) et (17) doivent être vérifiées, ainsi que les équations obtenues en différentiant l'équation proposée par rapport à $x_1 \ldots x_{n-1}$; on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial p_{nn}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

pour les valeurs précédentes des arguments. On peut donc mettre l'équation proposée sous la forme

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{nn-1} = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_{ik} p_{ik} + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i p_{ni} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i p_{n-1i} + \ldots, \end{array} \right.$$

les termes non écrits étant de degré supérieur; en remplaçant même x_{n-1} par $x_{n-1} + \lambda x_n$ on peut faire disparaître le terme en $p_{n-1\,n-1}$. Avant d'aller plus loin, je vais démontrer le théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$p_{nn-1} = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n, p_{n1}, \ldots, p_{nn-2}, p_{ik}, p_{nn}),$$

([1]) Je me suis inspiré, pour cette démonstration, de la méthode indiquée par M. Goursat (*Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, p. 188).

telle que $\frac{\partial F}{\partial p_{nn}}$ *et* $\frac{\partial F}{\partial p_{n-1\,n-1}}$ *sont nulles pour les valeurs suivantes :*

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0,$$

$$z_0 = \psi_1(x_1^0, \ldots, x_{n-2}^0) \qquad p_i^0 = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i}\right)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

$$p_{n-1}^0 = \psi_2^0, \qquad p_n^0 = \varphi_2^0,$$

$$p_{ik}^0 = \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-2),$$

$$p_{n-1\,i}^0 = \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_i}\right)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2), \qquad p_{ni}^0 = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\right)^0,$$

$$p_{n-1\,n-1}^0 = \psi_3^0, \qquad p_{nn}^0 = \varphi_3^0,$$

elle admet une intégrale holomorphe dans le voisinage de $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, *qui se réduit à*

$$\Psi = \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-2}) + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)\,\psi_2(x_1, \ldots, x_{n-2}) + \ldots$$
$$\text{pour } x_n = x_n^0,$$
$$\Phi = \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-2}) + (x_n - x_n^0)\,\varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-2}) + \ldots$$
$$\text{pour } x_{n-1} = x_{n-1}^0.$$

On peut, sans inconvénient, supposer que toutes les données initiales sont nulles ; il suffirait pour cela de poser

$$x_i = x_i^0 + x_i',$$
$$z = z' + \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-2}) + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)\,\psi_2 + \ldots + (x_n - x_n^0)\,\varphi_2 + \ldots.$$

Il résulte de là que, si l'on calcule de proche en proche les valeurs des dérivées successives pour $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, on aura, par hypothèse,

$$p_{ijk}^0 = 0, \qquad p_{nn,\ldots,nijk,\ldots}^0 = 0, \qquad p_{n-1\,n-1,\ldots,n-1\,ijk,\ldots}^0 = 0$$
$$(i, j\, k, \ldots, \leqq n-2).$$

L'équation proposée donne ensuite tous les $p_{nn-1,ijk,\ldots}$ en différentiant par rapport à $x_1, \ldots, x_{n-2}$; l'absence de termes du premier degré en p_{nn} et $p_{n-1\,n-1}$ permet de calculer sans ambiguïté les termes en p_{nnn-1}, $p_{nn-1\,n-1}$ et, par suite, aussi les termes en $p_{nnn-1,ijk,\ldots}$, $p_{nn-1,n-1,ijk,\ldots}$, et ainsi de suite.

Pour démontrer la convergence du développement ainsi obtenu, j'emploierai la méthode des fonctions majorantes et je considérerai l'équation auxiliaire suivante :

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
p_{nn-1} = {} & \frac{M}{\left\{
\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{x_1+\ldots+x_n+z+p_1+\ldots+p_n}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-2}\sum\limits_{k=1}^{n-2} p_{ik}}{R}\right)\\
&\times\left(1 - \frac{\sum\limits_{1}^{n-2} p_{ni}}{R}\right)\left(1 - \frac{\sum\limits_{1}^{n-2} p_{n-1i}}{R}\right)\left(1 - \frac{p_{nn}+p_{n-1\,n-1}}{R}\right)
\end{aligned}\right\}}\\
& - M\left(1 + \frac{p_{nn}+p_{n-1\,n-1}}{R}\right).
\end{aligned}\right.
$$

ρ et R étant les rayons des cercles de convergence de F pour les lettres correspondantes, et M le module maximum de F. Le second membre est manifestement une fonction majorante pour F; il suffit donc d'établir la convergence pour cette équation; pour cela, je poserai

$$x_1 + \ldots + x_{n-2} = u, \qquad x_{n-1} + x_n = v.$$

L'équation (18) devient

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = {} & \frac{M}{\left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{1-(n-2)u+2v+z+(n-2)\frac{\partial z}{\partial u}+2\frac{\partial z}{\partial v}}{\rho}\right]\\
&\times\left[\frac{1-\frac{(n-1)n}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{R}\right]\left[1-\frac{(n-2)}{R}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right]^2\left(1-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)
\end{aligned}\right\}}\\
& - M\left(1+\frac{2}{R}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),
\end{aligned}
$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = M\left[\frac{(n-1)n}{2R}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{2(n-2)}{R}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right] + \left(\frac{4M}{R^2}+\frac{2}{R}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)^2 + \ldots,$$

les termes non écrits étant, ou bien d'ordre inférieur à 2, ou bien de degré supérieur à 1 s'ils sont d'ordre égal ou supérieur à 2. Cette équation admet une intégrale holomorphe telle que z et $\frac{\partial z}{\partial v}$

se réduisent à o pour $v = 0$; dès lors, on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^k z}{\partial u^k} &= 0\\ \frac{\partial^{k+1} z}{\partial u^k \partial v} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{quel que soit } k,$$

on pourra calculer sans ambiguïté les valeurs de $\frac{\partial^k z}{\partial u^{k-2} \partial v^2}$ puis la valeur de $\frac{\partial^3 z}{\partial v^3}$, et ainsi de suite, comme il est aisé de le reconnaître; *et tous les coefficients obtenus seront positifs;* il en résulte immédiatement que le développement donné par l'équation (19) est convergent, ainsi que celui fourni par l'équation proposée.

Je reviens maintenant à l'équation (18) qui est l'objet principal de ce paragraphe; l'application du théorème précédent se fait immédiatement. Il y a une intégrale holomorphe qui se réduit à zéro pour $x_n = 0$ et à

$$x_n^3 \varphi_3 + x_n^4 \varphi_4 + \ldots,$$

pour $x_{n-1} = 0$; φ_3, φ_4, ... étant des fonctions arbitraires de x_1, x_2, ..., x_{n-2}. On reconnaît que

$$p^0_{i,j,k,\ldots} = 0 \quad \text{pour} \quad x_1 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0,$$
$$p^0_{n-1\, n-1,\ldots,\, n-1,\, ijk,\ldots} = 0,$$

et comme, d'autre part, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \quad x_n = 0, \quad p_i = 0, \quad p_{ik} = 0,$$

on en déduit

$$p^0_{n\, n-1,\, ijk,\ldots} = 0.$$

Il en résulte que cette intégrale holomorphe, développée suivant les puissances de x_n, ne contiendra que des termes du troisième degré; *il y a donc une infinité d'intégrales contenant la multiplicité singulière* M^2_{n-1}.

Les fonctions arbitraires φ_3, φ_4, ... correspondent précisément aux fonctions arbitraires qui entrent dans la définition des multiplicités singulières M^3_{n-1}, M^4_{n-1}, ...

Conclusions.

Étant donnée l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n, p_{ik}) = 0,$$

une intégrale de cette équation est définie en général par une multiplicité M_{n-1}^1; il y a exception si la multiplicité est singulière, c'est-à-dire si les équations

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} = p_{\rho i} + p_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \rho = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

$$\sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho n}} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + \frac{\partial f}{\partial p_{nn}} = 0,$$

$$\sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho i}} \left(\frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} \right)$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho n}} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} + \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\rho} p_{\rho n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$f = 0$$

sont vérifiées.

On obtient alors une multiplicité singulière M_{n-1}^2 qui est contenue dans une infinité d'intégrales.

A tout ordre p correspondent des multiplicités singulières M_{n-1}^p jouissant de la même propriété.

A toute multiplicité singulière M_{n-1}^p correspondent une infinité de multiplicités singulières M_{n-1}^{p+1} dépendant d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre; par suite, si deux multiplicités singulières M_{n-1}^p correspondent à la même multiplicité singulière M_{n-1}^{p-1}, et si elles ont un élément d'ordre p commun en un point, il en sera de même tout le long d'une courbe passant par ce point.