LECORNU

Sur les engrenages à dents circulaires

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 172-179
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__172_1>

SUR LES ENGRENAGES A DENTS CIRCULAIRES;

Par M. L. Lecornu.

Dans le tracé des engrenages plans, on substitue souvent, aux profils indiqués par la théorie, des arcs de cercle choisis de manière à épouser le mieux possible les formes exactes des dents. Il est, dès lors, intéressant d'envisager, d'une manière générale, la question suivante :

Connaissant les deux circonférences primitives, comment disposer deux profils circulaires, invariablement liés à ces deux circonférences, de telle façon que le contact des deux profils assure un rapport des vitesses angulaires sensiblement constant? Nous supposerons qu'il s'agit d'un engrenage extérieur; le cas de l'engrenage intérieur se traiterait d'une manière toute semblable.

Soient O_1 et O_2 les centres des deux circonférences primitives, R_1 et R_2 leurs rayons. Soient A_1 et A_2 les centres des deux profils circulaires. Dans le mouvement considéré, la distance des centres A_1, A_2 reste constante. Le mouvement est donc exactement le même que celui d'un système de trois barres invariables O_1A_1, A_1A_2, A_2O_2, articulées en A_1, A_2 et fixées aux deux points O_1, O_2. C'est le système ordinaire de transmission constitué par une bielle et deux manivelles. Nous appellerons a_1 et a_2 les longueurs O_1A_2 et O_2A_2. Si l'on désigne par P le point de rencontre de la manivelle A_1A_2 avec la droite fixe O_1O_2, on sait que le rapport des vitesses angulaires des deux arbres liés à O_1A_1 et O_2A_2 est égal à $\frac{O_2P}{O_1P}$. Il faut donc faire en sorte que la position du point P, pendant le travail d'une dent, varie aussi peu que possible.

M. Scharp a étudié, à deux reprises, ce problème dans les

Proceedings of the Institution of civil Engineers de Londres. Dans une première Note parue en 1893 et intitulée : *A new method of designing wheel teeth,* il n'a guère indiqué qu'un procédé par tâtonnement. L'année suivante, il a fait connaître, sous le titre : *Circular wheel teeth,* une méthode plus précise, basée sur des calculs qui, sans être mathématiquement exacts, paraissent présenter une approximation suffisante. Il a pu ainsi formuler la règle à suivre pour que le rapport des vitesses angulaires prenne la même valeur en trois points de la dent considérée ; par exemple, à la racine, au milieu et à l'extrémité. Malheureusement, la construction qu'il obtient est fort compliquée, à tel point qu'on doit se demander si elle est plus avantageuse que la détermination exacte de quelques points du profil théorique, suivie d'un tracé graphique effectué au juger.

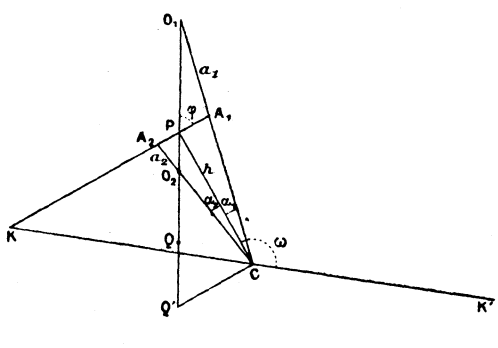
En me bornant au cas, le plus fréquent, où le nombre des dents est assez élevé pour que le pas ne soit qu'une petite partie de chacune des circonférences primitives, je suis parvenu à des résultats beaucoup plus simples, que je vais exposer ici. La condition que je m'impose consiste à faire en sorte que, pour une rotation élémentaire des manivelles, le déplacement du point P sur la ligne des centres soit d'un ordre infinitésimal aussi élevé que possible.

Avec une bielle et des manivelles placées d'une façon quelconque, le déplacement élémentaire du point P est un infiniment petit du même ordre que la rotation de chaque manivelle. Si l'on veut que le déplacement de P soit au moins du second ordre, il faut, ou bien que P soit le point de contact de la bielle avec son enveloppe, ou bien que la bielle touche son enveloppe en un point d'inflexion. Dans ce dernier cas, le mouvement élémentaire de la bielle est une simple translation : le centre instantané est rejeté à l'infini et les manivelles sont parallèles. Il est facile de voir que, pour réduire le déplacement de P au second ordre, on doit, en outre, placer les manivelles perpendiculairement à la bielle et que le déplacement de P ne peut être d'un ordre supérieur au second, exception faite du cas particulier où les deux circonférences primitives sont égales.

Supposons, maintenant, que la bielle touche son enveloppe au point P. Dans ces conditions, le déplacement de P sur la ligne des centres est généralement du second ordre; mais il peut accidentellement devenir du troisième ordre: cela arrive si l'enveloppe présente en P un rebroussement. En effet, au voisinage d'un rebroussement de première espèce, l'équation d'une courbe peut se mettre sous la forme $y^2 = mx^3$, d'où l'on tire, pour l'ordonnée à l'origine: $Y = y - y'x = -\frac{4}{27}\frac{y'^3}{m}$ et, par conséquent, la longueur Y interceptée, à partir du rebroussement, sur une droite menée par ce point et différente de la tangente au rebroussement, est du même ordre que le cube de la déviation de la tangente. Il résulte de là que, si l'angle au centre correspondant au travail d'une dent de l'engrenage est très petit du premier ordre, le deplacement corrélatif du point P sera du troisième ordre de petitesse, pourvu que la bielle fictive touche son enveloppe en un point de rebroussement et pourvu que ce point de rebroussement coïncide avec le point P. Suivons les conséquences de cette double hypothèse (*fig.* 1).

On sait que les droites, touchant au même instant leur enveloppe en un point de rebroussement, passent toutes par un même

Fig. 1.



point K et que, si K' est le symétrique de K par rapport au centre instantané C, CK' est un diamètre de la circonférence des inflexions. Appelons k la longueur de ce diamètre et soient p_1, p_2 les longueurs CA_1, CA_2. La droite CP, dont nous désignerons la longueur par h, est normale à la bielle A_1A_2. Soit φ l'angle que forme cette bielle avec la ligne des centres. Soient α_1 et α_2 les deux angles A_1CP et A_2CP. Soit ω l'angle PCK'. La formule dite *de Savary* nous fournit d'abord les relations :

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_1 + a_1} = \frac{1}{k\cos(\omega - \alpha_1)},$$

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_2 - a_2} = \frac{1}{k\cos(\omega + \alpha_2)}.$$

Le triangle CPK donne

$$h = -k\cos\omega.$$

On a en outre, par les triangles PCO_1 et PCO_2,

$$\frac{\sin\alpha_1}{R_1} = \frac{\cos\varphi}{p_1 + a_1} = \frac{\cos(\alpha_1 + \varphi)}{h},$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{R_2} = \frac{\cos\varphi}{p_2 - a_2} = \frac{\cos(\alpha_2 - \varphi)}{h}$$

et, par les triangles PCA_1 et PCA_2,

$$h = p_1\cos\alpha_1 = p_2\cos\alpha_2.$$

Nous formons ainsi un système de neuf équations renfermant dix éléments inconnus : a_1, a_2, p_1, p_2, h, k, ω, φ, α_1, α_2 (on suppose donnés les rayons R_1, R_2 des circonférences primitives). L'angle φ est assujetti, au point de vue pratique, à rester assez voisin de $\frac{\pi}{2}$, car on sait que la réaction normale des dents ne doit pas être trop oblique sur la ligne des centres. Donnons-nous donc *a priori* la valeur de cet angle. Il reste neuf inconnues devant vérifier neuf équations et le problème est déterminé. Proposons-nous, par exemple, de calculer h.

On déduit des relations qui précèdent

$$\frac{\cos\alpha_1}{h} - \frac{\sin\alpha_1}{R_1\cos\varphi} = \frac{1}{k\cos(\omega - \alpha_1)}$$

et

$$\tang\alpha_1 = \frac{R_1\cos\varphi}{h + R_1\sin\varphi};$$

d'où, par l'élimination de α_1,

$$[(h + R_1\sin\varphi)\cos\omega + R_1\cos\varphi\sin\omega]\,kR_1\sin\varphi = h(h^2 + R_1^2 + 2hR_1\sin\varphi),$$

ou bien, en remplaçant $k\cos\omega$ par $-h$,

$$kR_1^2\sin\omega\sin\varphi\cos\varphi = h(h^2 + R_1^2 + 3R_1 h\sin\varphi + R_1^2\sin^2\varphi).$$

On aurait de même

$$k R_2^2 \sin\omega \sin\varphi \cos\varphi = h(h^2 + R_2^2 - 3 R_2 h \sin\varphi + R_2^2 \sin^2\varphi).$$

Divisant ces deux dernières équations membre à membre, il vient

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{h^2 + R_1^2 + 3 R_1 h \sin\varphi + R_1^2 \sin^2\varphi}{h^2 + R_2^2 - 3 R_2 h \sin\varphi + R_2^2 \sin^2\varphi},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{h + 3 R_1 \sin\varphi}{h - 3 R_2 \sin\varphi},$$

d'où

$$h = \frac{3 R_1 R_2 \sin\varphi}{R_1 - R_2},$$

ou bien

$$\frac{3 \sin\varphi}{h} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}.$$

Soit Q le point conjugué de P par rapport au segment $O_1 O_2$. On a

$$PQ = \frac{2 R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

L'inconnue h est donc égale à $\frac{3}{2} PQ \sin\varphi$. De là cette construction :

Déterminer le point Q, *conjugué de* P *par rapport* à $O_1 O_2$. *Prolonger* PQ *d'une longueur* QQ′ *égale à* $\frac{PQ}{2}$ *et projeter le point* Q′ *en* C *sur la direction* PC, *normale en* P *à la bielle. Le point* C *est le point de concours des manivelles, dont on obtient ainsi, d'un seul coup, la grandeur et la direction.*

Avec un engrenage ainsi construit, et en supposant, comme cela doit être, que dans la position moyenne les dents se touchent au point P, leurs rayons sont égaux à $h \operatorname{tang}\alpha$ et $h \operatorname{tang}\beta$, c'est-à-dire à $\frac{3 R_1 R_2 \cos\varphi}{2 R_2 + R_1}$ et $\frac{3 R_1 R_2 \cos\varphi}{2 R_1 + R_2}$. Pour l'engrenage ordinaire à développante, les rayons de courbure en P seraient $R_1 \cos\varphi$ et $R_2 \cos\varphi$. Ils se trouvent donc ici multipliés par les facteurs $\frac{3 R_2}{2 R_2 + R_1}$ et $\frac{3 R_1}{2 R_1 + R_2}$.

En supposant R_1 infini, on obtient le cas de l'engrenage à crémaillère et l'on a alors $h = 3R_2 \sin\varphi$. Les rayons des dents sont $3R_2 \cos\varphi$ pour la crémaillère et $\frac{3}{2}R_2 \cos\varphi$ pour le pignon.

Le principal inconvénient des engrenages établis dans ces conditions consiste dans la dépendance établie entre la forme des dents d'une roue et le rayon de l'autre roue, dépendance qui empêche une même roue d'engrener avec plusieurs autres de diamètres différents.

Le problème étant résolu comme nous venons de le faire, nous sommes assurés qu'un déplacement du premier ordre imprimé à la bielle ne déplace son point de rencontre P avec la ligne des centres que d'une longueur $PP' = y$ infiniment petite du troisième ordre. Nous allons évaluer la partie principale de cet infiniment petit. Pour fixer les idées, admettons que P' soit compris entre P et O_1, alors $O_1P' = R_1 - y$ et $O_2P' = R_2 + y$. Posons $A_1P' = A_1P - x$ et, par conséquent, $A_2P' = A_2P + x$. Désignons d'ailleurs, pour abréger, par u_1 et u_2 les deux longueurs A_1P et A_2P, respectivement égales à $h\,\text{tang}\,\alpha_1$ et $h\,\text{tang}\,\alpha_2$. En écrivant que les angles $O_1P'A_1$ et $O_2P'A_2$ ont même cosinus, on trouve

$$\begin{aligned}&[(R_1-y)^2+(u_1-x)^2-a_1^2](R_2+y)(u_2+x)\\&\quad=[(R_2+y)^2+(u_2+x)^2-a_2^2](R_1-y)(u_1-x).\end{aligned}$$

Soit m une constante finie. En posant $y = mx^3$ et négligeant les puissances de x supérieures à la troisième, on doit pouvoir déterminer m de telle manière que l'équation précédente soit identiquement vérifiée. Égalons donc séparément à zéro les coefficients des puissances de x, jusqu'à la troisième incluse. Il vient

$$\begin{gathered}(R_1^2+u_1^2-a_1^2)R_2u_2-(R_2+u_2^2-a_2^2)R_1u_1=0,\\(R_1^2+u_1^2-a_1^2)R_2+(R_2^2+u_2^2-a_2^2)R_1-2(R_1+R_2)u_1u_2=0,\\2(R_1u_2-R_2u_1)+R_2u_2-R_1u_1=0,\\(R_1^2+u_1^2-a_1^2)u_2m+(R_2^2+u_2^2-a_2^2)u_1m\\\qquad-2R_1R_2(u_1+u_2)m+R_1+R_2=0.\end{gathered}$$

On a d'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit,

$$u_1 = \frac{3R_1R_2\cos\varphi}{2R_2+R_1} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{3R_1R_2\cos\varphi}{2R_1+R_2}.$$

D'autre part le triangle O_1PA_1 donne

$$a_1^2 = \frac{R_1^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\alpha_1} = R_1^2 \sin^2\varphi + R_1 \sin^2\varphi \operatorname{tang}^2\alpha_1 ;$$

mais

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{R_1 \cos\varphi}{h + R_1 \sin\varphi} = \frac{(R_1 - R_2)\cot\varphi}{2R_2 + R_1},$$

d'où

$$a_1^2 = R_1 \sin^2\varphi + \frac{R_1^2(R_1 - R_2)^2 \cos^2\varphi}{(2R_2 + R_1)^2}.$$

Par suite

$$R_1^2 + u_1^2 - a_1^2 = \frac{6R_1^2 R_2 \cos^2\varphi}{2R_2 + R_1}$$

et, de même,

$$R_2^2 + u_2^2 - a_2^2 = \frac{6R_1 R_2^2 \cos^2\varphi}{2R_1 + R_2}.$$

Au moyen de ces formules, on reconnaît que les premiers membres des trois premières équations de condition sont nuls : c'est une preuve de l'exactitude des calculs. La quatrième équation donne ensuite

$$m = \frac{(2R_1 + R_2)(2R_2 + R_1)}{18R_1^2 R_2^2 \cos\varphi \sin^2\varphi}$$

et l'on en déduit la valeur de l'écart $y = mx^3$. Au lieu du déplacement x estimé suivant la direction de la bielle, on peut introduire l'arc élémentaire s, décrit dans le roulement relatif des deux circonférences primitives. On a évidemment $x = s \sin\varphi$; d'où

$$y = \frac{(2R_1 + R_2)(2R_2 + R_1)}{18R_1^2 R_2^2} s^3 \operatorname{tang}\varphi.$$

Calculons maintenant la variation du rapport v des vitesses angulaires. Ce rapport, égal primitivement à $\frac{R_2}{R_1}$, devient $\frac{R_2 + y}{R_1 - y}$. Si l'on néglige y^2, la variation relative $\frac{\delta v}{v}$ est égale à $y\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, ce qu'on peut écrire

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{(2R_1 + R_2)(2R_2 + R_1)(R_1 + R_2)}{18R_1^3 R_2^3} s^3 \operatorname{tang}\varphi.$$

Nous mettrons cette expression sous une autre forme en introduisant les nombres, n_1 et n_2, des dents des deux roues. L'arc s

décrit par un point de l'une des circonférences primitives, quand le point de contact de la dent considérée s'écarte de cette circonférence pour se porter vers l'une des extrémités de la dent, est sensiblement égal à la moitié du pas (pourvu que l'arc d'approche soit égal à l'arc de retraite). On a donc, dans ces conditions,

$$\frac{R_1}{n_1} = \frac{R_2}{n_2} = \frac{s}{\pi}.$$

Donc

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{(2n_1 + n_2)(2n_2 + n_1)(n_1 + n_2)}{18 n_1^3 n_2^3} \pi^3 \operatorname{tang} \varphi.$$

Pour les engrenages à développante de cercle, on prend communément $\varphi = 75°$. Adoptons cette valeur, il vient finalement

$$\frac{\delta v}{v} = 6,43 \times \frac{(2n_1 + n_2)(2n_2 + n_1)(n_1 + n_2)}{n_1^3 n_2^3}.$$

Si, par exemple, les roues portent l'une 60 et l'autre 30 dents, on a à peu près $\frac{\delta v}{v} = 0,0017$: c'est-à-dire qu'en supposant constante la vitesse de l'une des roues, celle de l'autre éprouve une variation relative, de part et d'autre de sa valeur moyenne, inférieure à $\frac{2}{1000}$. L'amplitude totale n'atteint pas $\frac{1}{250}$ de la vitesse moyenne : elle est donc tout à fait négligeable en pratique. Dans le cas de la crémaillère, il faut faire $n_1 = \infty$, ce qui donne $\frac{\delta v}{v} = \frac{12,86}{n_2^3}$. Avec 20 dents seulement au pignon, et en supposant uniforme la translation de la crémaillère, la variation de vitesse du pignon a pour valeur relative $\frac{12,86}{(20)^3} = 0,0016$.

Observons, en terminant, que l'approximation dépend du nombre des dents, mais nullement de leurs dimensions absolues. La méthode est donc intéressante surtout dans le cas des engrenages de grande taille, pour lesquels les dents peuvent être nombreuses, sans se réduire à des proportions qui rendent à peu près indifférente la forme de leur contour.