KRYGOWSKI

Sur les fonctions à espaces lacunaires

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 240-243
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__240_0>

SUR LES FONCTIONS A ESPACES LACUNAIRES;

Par M. Krygowski.

Considérons un ensemble dénombrable P de points, situés tous dans un domaine D de la variable complexe z. Cet ensemble P doit être partout condensé dans D et peut être formé par les points rationnels, algébriques de ce domaine, ou même au moyen des ensembles dénombrables et partout condensés de points algébriques et transcendants. Pour obtenir l'expression d'une fonction uniforme et continue, pour laquelle le domaine D est un espace lacunaire, il faut avant tout connaître l'expression générale d'un tel ensemble pour le domaine D et puis procéder, comme l'indique M. Poincaré dans son Mémoire : *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (*Acta Soc. Scientiarum Fenn.*, t. XII, et *American Journal*, t. XIV).

Prenons, par exemple, dans le plan des u', le carré, dont les sommets sont

$$Ke^{\frac{\pi i}{4}},\quad Kie^{\frac{\pi i}{4}},\quad -Ke^{\frac{\pi i}{4}},\quad -Kie^{\frac{\pi i}{4}},$$

où K désigne le quart de la période réelle de $\operatorname{sn} u'$. Les points dits *rationnels* de ce domaine seront donnés par la formule suivante, dans laquelle les m_i désignent des entiers,

$$\frac{K\sqrt{2}}{2}\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}+i\,\frac{m_3-m_4}{m_3+m_4}\right). \tag{1}$$

En passant du plan de la variable u' au plan de $u = u'e^{-\frac{\pi i}{4}}$, on obtient au lieu de (1) les points

$$a_{m_1, m_2, m_3, m_4} = \tfrac{1}{2}(1-i)K\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}+i\,\frac{m_3-m_4}{m_3+m_4}\right). \tag{2}$$

Faisons maintenant la représentation conforme de ce carré dans le plan des u sur la surface du cercle décrit de l'origine avec de rayon égal à un dans le plan des z.

On aura, d'après la formule de M. Schwarz, pour l'ensemble de points du cercle, qui correspondent aux points du carré, l'expression

$$(3) \qquad \operatorname{sn}\left[\tfrac{1}{2}(1-i)\mathrm{K}\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}+i\,\frac{m_3-m_4}{m_3+m_4}\right),\ i\right].$$

La fonction suivante,

$$(4) \qquad f(z) = \sum_{(m_1 m_2 m_3 m_4=0)}^{+\infty}{}' \mathrm{H}\left[\frac{1}{z-\operatorname{sn}(a_{m_1,m_2,m_3,m_4}i)}\right] e^{\varphi(m_1,m_2,m_3,m_4)},$$

dans laquelle H est l'algorithme d'une fonction rationnelle et entière, et dans laquelle $\varphi(m_1, m_2, m_3, m_4)$ désigne la forme

$$\sum_{i,k} a_{ik} m_i m_k, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

définie et négative de m_1, m_2, m_3, m_4, nous présente une fonction uniforme et continue, pour laquelle la surface du cercle est un espace lacunaire. Parmi les points (3) il y a, d'après un théorème d'Abel sur la division de la lemniscate, une infinité de points algébriques.

Considérons maintenant la formule

$$y = \int_{x_0}^{x} x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\,dx$$

(*voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, p. 332) et supposons qu'on ait, avec les notations de M. Picard,

$$m = n = p = 3,$$

Dans ce cas, l'inversion de cette intégrale nous donne la formule

$$x = \frac{2}{1+3\sqrt[3]{2}\,p'_y\left(\dfrac{iy}{6\sqrt[3]{2}}\right)}\ (^1), \qquad (g_2 = 0, \quad g_3 = -4),$$

par laquelle on fait la représentation d'un triangle équilatéral dans le plan des y, sur la moitié positive du plan des x. En passant de

(1) On pourrait simplifier cette formule en prenant Cy au lieu de y ($C = \text{const.}$).

la moitié du plan des x à la surface du cercle décrit de l'origine avec le rayon égal à un dans le plan des z, on obtient la formule

$$(5) \qquad z = \frac{2 - i - \sqrt[3]{2}\,p'_y\left[\dfrac{iy}{6\sqrt[3]{2}}\right]}{2 + i + \sqrt[3]{2}\,p'_y\left[\dfrac{iy}{6\sqrt[3]{2}}\right]}.$$

Les sommets du triangle équilatéral dans le plan des y sont donnés, à des périodes près, par les expressions

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = -b\sqrt[3]{2}\,i\alpha, \qquad y_3 = +\sqrt[3]{2}\,i\alpha,$$

où α est défini par la relation $p'\alpha = -2i$.

Prenons maintenant les points rationnels de ce triangle d'après la formule

$$y_{m_1, m_2, m_3} = \frac{m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

les points correspondants du cercle seront donnés par les points z_{m_1, m_2, m_3} de la formule (5) dans laquelle l'argument y prend les valeurs y_{m_1, m_2, m_3}.

En écrivant une formule analogue à la formule (4), dans laquelle z_{m_1, m_2, m_3} se trouve au lieu de $\operatorname{sn}(a_{m_1, m_2, m_3, m_4})$ et $\varphi(m_1, m_2, m_3)$ au lieu de $\varphi(m_1, m_2, m_3, m_4)$, on obtient une nouvelle expression d'une fonction uniforme et continue, pour laquelle le cercle est un espace lacunaire. La sommation s'étend dans cette formule à toutes les valeurs des entiers m_1, m_2, m_3. Il en est de même dans les autres cas (*loc. cit.*, p. 333)

$$m = 2, \qquad n = 4, \qquad p = 4,$$
$$m = 2, \qquad n = 3, \qquad p = 6.$$

Faisons maintenant la représentation conforme d'un domaine R dans le plan des z sur la surface du cercle décrit de l'origine avec le rayon égal à un dans le plan des u. La fonction $z = f(u)$ est uniforme, continue, etc., pour tous les points u, qui sont à l'intérieur du cercle. Prenons maintenant pour points u de ce cercle, par exemple, les points (3) ou (5); les points correspondants z formeront aussi un ensemble de points dénombrable et partout condensé. On voit donc que la recherche de fonctions à espaces lacunaires est équivalente à la solution du problème de la représentation conforme (c'est-à-dire à la solution du problème de Dirichlet).

Au lieu de l'élément $\frac{1}{z-a}$ dans l'algorithme H, on pourrait prendre, par exemple, l'élément

$$\frac{1}{e^{z-a}-1}, \tag{6}$$

dans lequel a désigne le point de l'ensemble.

La convergence absolue et uniforme de ces sortes de séries nous montre que nous obtiendrons, d'après le théorème de Weierstrass [*Zur Functionenlehre* (*Werke,* t. II, p. 205)], des fonctions monogènes, uniformes et continues. Dans le cas de l'élément (6), ces fonctions ont des espaces lacunaires périodiques.