BULLETIN DE LA S. M. F.

J. LE ROUX

# Sur l’équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 25 (1897), p. 63-71
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__63_1>

## SUR L'ÉQUATION LINÉAIRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE;

Par M. J. Le Roux.

1. M. Bendixson a publié, dans le *Bulletin de la Société Mathématique,* une élégante Note sur l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

Cette Note m'a remis en mémoire quelques remarques relatives à ce type d'équations, que je demande la permission d'exposer succinctement.

Considérons l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Supposons qu'on ait intégré l'équation des caractéristiques

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Par tout point du plan [dans le domaine où $f(x, y)$ satisfait aux conditions d'intégrabilité de l'équation (2)], il passe une caractéristique et, en général, une seule. La caractéristique qui passe au point $(x_0, y_0)$ peut être représentée, suivant la notation de M. Bendixson, par

$$y = \psi(x, x_0 y_0). \tag{3}$$

Il s'agit maintenant d'intégrer l'équation (1), de manière que l'intégrale prenne des valeurs données sur une courbe C. Le problème de l'intégration consiste : 1° à donner le moyen de calculer la valeur que prend en un point arbitraire M du plan l'intégrale $z$ qui satisfait aux conditions initiales indiquées ; 2° à déterminer les singularités de cette intégrale et les limites du domaine où elle se trouve définie.

Or, ce problème est ici immédiatement résolu. En effet, l'identité

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial y}dx\left[\frac{dy}{dx} - f(x, y)\right]$$

montre que, lorsqu'on se déplace sur une caractéristique, on a $dz = 0$; par suite, $z$ conserve la même valeur en tous les points d'une même caractéristique.

Cela posé, considérons la caractéristique du point $M(x_0, y_0)$, définie par l'équation (3). Elle rencontre la courbe (C) (*fig.* 1) en un point $P(\xi, \eta)$. On a, d'après la remarque précédente,

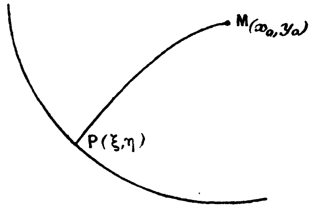
$$z(x_0, y_0) = z(\xi, \eta), \tag{4}$$

ou bien, d'après l'équation (3), qui donne $\eta = \psi(\xi, x_0, y_0)$ :

$$z(x_0, y_0) = z[\xi, \psi(\xi, x_0, y_0)]. \tag{5}$$

Supposons que la courbe (C) soit une parallèle à $Oy$, $x = \xi$; alors $\xi$ désigne une constante déterminée dans l'équation (5) et $z(\xi, \eta)$ une fonction connue de $\eta$. L'équation (5) détermine donc

Fig. 1.




complètement la valeur de l'intégrale. Si la valeur initiale de l'intégrale, $z(\xi, \eta)$, se réduit à $\eta$, on trouve l'intégrale particulière signalée par M. Bendixson,

$$z(x_0, y_0) = \psi(\xi, x_0, y_0).$$

En résumé, pour calculer la valeur de l'intégrale en M, il faut d'abord déterminer la caractéristique de ce point et trouver ensuite son intersection avec la courbe (C). Pour que l'intégrale existe en M, il faut donc : 1° que la caractéristique existe en ce point; 2° que cette caractéristique rencontre la courbe (C), sur laquelle on donne les valeurs initiales de l'intégrale. Le nombre des valeurs de $z$ est, en général, égal au nombre des points d'intersection. Cette intégrale se présente, par conséquent, comme une fonction multiforme. Les lignes de passage d'une détermination à une autre (lignes de ramification) sont les caractéristiques tangentes à la courbe C.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

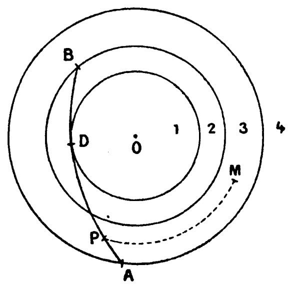
Les caractéristiques sont des cercles concentriques.

Supposons qu'on donne les valeurs de $z$ sur un arc de courbe AB (*fig.* 2). Traçons les cercles caractéristiques passant aux extrémités de l'arc et le cercle caractéristique tangent en D à AB. Ces trois cercles partagent le plan en quatre régions, numérotées sur la figure 1, 2, 3, 4. Dans les régions 1 et 4 l'intégrale n'existe pas;

dans la région 2, elle admet deux valeurs distinctes en général, et dans la région 3 une seule valeur.

Le calcul de la valeur de l'intégrale en un point M de l'une de

Fig. 2.




ces régions est équivalent à ce problème courant de Géométrie descriptive : *Placer un point sur une surface de révolution d'axe vertical.*

Les caractéristiques limites du domaine d'existence de l'intégrale et les caractéristiques de ramification sont constituées par les lignes de contour apparent horizontal.

2. Ces considérations s'appliquent également aux équations linéaires à second membre.

Soit à résoudre

$$\frac{\partial z}{\partial x} - a\frac{\partial z}{\partial y} = F(x, y). \tag{7}$$

Désignons par $\lambda$ une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} - a\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \tag{7'}$$

et prenons comme nouvelles variables $x$ et $\lambda$. L'équation (7) devient

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y)_\lambda, \tag{8}$$

en désignant par $F(x, y)_\lambda$ ce que devient $F(x, y)$ quand on y remplace $y$ par sa valeur en fonction de $x$ et de $\lambda$.

On a donc (*fig.* 1)

$$z^M = z_P + \int_P^M F(x, y)_\lambda \, dx.$$

L'intégrale $\int_P^M F(x, y)_\lambda \, dx$ est prise en supposant $\lambda$ constant, c'est-à-dire en remplaçant $y$ par une fonction de $x$, telle que le point $(x, y)$ décrive la caractéristique PM. La valeur de cette intégrale est d'ailleurs indépendante du choix de l'intégrale particulière $\lambda$ de l'équation (7′) et, par suite, de la valeur numérique de $\lambda$. Elle ne dépend que de la position géométrique de la caractéristique d'intégration PM.

3. Les fonctions $z$ étudiées dans les développements précédents peuvent être déterminées lorsqu'on connaît les caractéristiques et les valeurs initiales ; mais, pour qu'elles soient réellement des intégrales de l'équation considérée, il faut qu'elles admettent des dérivées partielles par rapport à $x$ et par rapport à $y$. M. Bendixson a démontré que l'intégrale déjà signalée

$$z(x, y) = \psi(\xi, x, y)$$

admet ces dérivées et satisfait à l'équation (1). Il est d'ailleurs facile de démontrer que l'existence de l'une des dérivées entraîne celle de l'autre. En effet, l'équation

$$(3) \qquad y = \psi(x, x_0, y_0)$$

exprime que le point $(x, y)$ est situé sur la caractéristique passant au point $(x_0, y_0)$. Mais, à cause de la détermination univoque des caractéristiques dans le domaine où nous nous plaçons, cette même courbe pourra être définie par la condition de passer au point $(x, y)$. De sorte qu'on peut regarder comme coordonnées courantes soit $(x, y)$, soit $(x_0, y_0)$. Prenons comme variables $(x_0, y_0)$ et regardons $x$ et $y$ comme des constantes. Sur la caractéristique (3) nous aurons constamment

$$(9) \qquad \frac{dy_0}{dx_0} = f(x_0, y_0).$$

Mais nous avons aussi, pour tout déplacement situé sur la caractéristique,

$$\psi(x, x_0 + \Delta x_0 y_0 + \Delta y_0) - \psi(x, x_0, y_0) = 0,$$

ou bien

$$\frac{\psi(x, x_0 + \Delta x_0 y_0 + \Delta y_0) - \psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0)}{\Delta x_0} \Delta x_0$$
$$+ \frac{\psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) - \psi(x, x_0, y_0)}{\Delta y_0} \Delta y_0 = 0.$$

Or $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ tend vers une limite déterminée lorsque $\Delta x_0$ tend vers zéro ; si, d'autre part, la dérivée de $\psi$ par rapport à $x_0$ existe et qu'elle soit une fonction continue de $y_0$, le rapport

$$\frac{\psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) - \psi(x, x_0, y_0)}{\Delta y_0},$$

qui est indépendant de $\Delta x_0$, tendra aussi vers une limite déterminée lorsque $\Delta y_0$ tendra vers zéro.

Nous aurons, de plus, d'après l'équation (9),

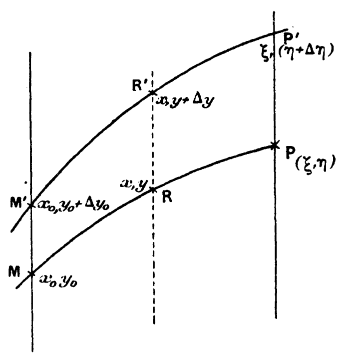
$$\psi'_{x_0} + f(x_0, y_0)\psi'_{y_0} = 0.$$

Donc l'existence d'une dérivée continue relative à un déplacement extérieur à la caractéristique entraîne l'existence d'une dérivée relative à un déplacement quelconque, et la fonction $\psi$ est une intégrale de l'équation (1).

Il ne reste plus qu'à démontrer l'existence d'une dérivée, par exemple de $\frac{\partial \psi}{\partial y_0}$. Les mêmes considérations géométriques nous conduiront facilement à l'élégante formule de M. Bendixson.

Considérons les caractéristiques des deux points $M(x_0, y_0)$ et $M'(x_0, y_0 + \Delta y_0)$ ; elles rencontrent la droite $x = \xi$ (*fig.* 3) aux points $P(\xi, \eta)$ et $P'(\xi, \eta + \Delta\eta)$. Je dis que $\eta$ est une fonction con-

Fig. 3.




tinue de $y_0$ dans le domaine D où nous nous plaçons si les conditions suivantes sont vérifiées : 1° en tout point du domaine il passe une seule caractéristique bien déterminée, sans points singuliers ni tangentes parallèles à $Oy$; 2° les arcs de caractéristiques MP, MP′, ... ne sortent point de ce domaine. Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les caractéristiques des points $(\xi, \eta - \varepsilon)$ et $(\xi, \eta + \varepsilon)$ puissent rencontrer la droite $x = x_0$ sans sortir du domaine D; comme deux arcs de caractéristiques ne peuvent pas se traverser dans ce domaine, il en résulte que la première (celle du point $\xi, \eta - \varepsilon$) est située tout entière au-dessous de MP, et la seconde tout entière au-dessus. Soient $y_0 - \alpha$ et $y_0 + \beta$ les ordonnées des points où elles rencontrent la droite $x = x_0$; l'inégalité

$$-\alpha < \Delta y_0 < \beta$$

entraînera

$$-\varepsilon < \Delta \eta < \varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité. Cela posé, considérons deux courbes dont nous désignerons par Y et $y$ les ordonnées qui correspondent à une même valeur de $x$. On a évidemment

$$Y - y = Y_0 - y_0 + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx}\right) dx.$$

Appliquons cette remarque aux deux caractéristiques MP et MP′; nous aurons

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta y_0} - 1 = \int_{x_0}^{\xi} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta y_0} dx.$$

Dans cette formule $y$ et $y + \Delta y$ désignent les ordonnées des deux courbes MP et MP′

$$y = \psi(x, x_0, y_0) \qquad y + \Delta y = \psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0).$$

La fonction

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta y_0}$$

étant une fonction continue de $x$ dans l'intervalle de $x_0$ à $\xi$, on a

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\Delta \eta}{\Delta y_0}\right) = \frac{f(\xi, \eta + \Delta \eta) - f(\xi, \eta)}{\Delta \eta} \frac{\Delta \eta}{\Delta y_0},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta y_0} = e^{\int_{x_0}^{\xi} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx}$$

Si donc $f(x, y)$ admet une dérivée continue par rapport à $y$, on aura

$$\frac{d\eta}{dy_0} = e^{\int_{x_0}^{\xi} f'_y(x,y)\,dx},$$

l'intégrale étant prise suivant la caractéristique.

Considérons maintenant la fonction $z(x_0, y_0)$ définie par l'équation (5), et supposons qu'on la détermine par la condition de se réduire à $F(\eta)$ pour $x = \xi$. On a alors

$$z(x_0, y_0) = F[\psi(\xi, x_0, y_0)].$$

Si la dérivée $\frac{dF}{d\eta}$ existe, il en sera de même des dérivées

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{dF}{d\eta}\frac{d\eta}{dx_0},$$

$$\frac{dz}{dy_0} = \frac{dF}{d\eta}\frac{d\eta}{dy_0} \qquad [\eta = \psi(\xi, x_0, y_0)],$$

qui satisferont à l'équation (1).

L'équation avec second membre (7) nous fournit des résultats analogues.

Considérons l'expression

$$u = \int_{x_0}^{x} F(x, y)_\lambda\, dx.$$

Désignons par $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ les dérivées prises en regardant $x$ et $y$ comme variables indépendantes; par $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ les dérivées obtenues en prenant comme variables $x$ et $\lambda$.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{F'_y}{\lambda'_y}\right)dx.$$

L'intégrale

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{F'_y}{\lambda'_y}\right)dx$$

aura une valeur bien déterminée si $F'_y$ et $\lambda'_y$ sont des fonctions continues, la seconde étant différente de zéro sur la courbe d'intégration, ce qui suppose que la caractéristique n'a pas de tangentes parallèles à $Ox$. Dans cette hypothèse, les dérivées $\frac{du}{dx}$

et $\frac{du}{dy}$ ont pour expressions

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{F}(x, y) + \lambda'_x \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\mathrm{F}'_y}{\lambda'_y}\right) dx,$$

$$\frac{du}{dy} = \qquad\qquad \lambda'_y \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\mathrm{F}'_y}{\lambda'_y}\right) dx.$$

La fonction $u$ est l'intégrale particulière de l'équation (7) qui s'annule sur la droite $x = x_0$.