SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 92-97
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__92_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 MAI 1897.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Bricard : *Étude géométrique d'un déplacement remarquable et d'un hyperboloïde articulé.*

M. Raffy : *Sur les surfaces conjuguées à un complexe tétraédral.*

M. Laisant : *Sur l'interpolation successive.*

M. Andrade adresse une *Note sur les courbes gauches associées et sur les développables circonscrites à une sphère.*

SÉANCE DU 19 MAI 1897.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Lacauchie, présenté par MM. Lemoine et Brocard ; M. l'abbé de Montcheuil, présenté par MM. Haton de la Goupillière et Kœnigs.

Communications :

M. Fleury : *Sur le postulatum d'Euclide.*

M. Picard : *Sur le nombre des conditions qui expriment qu'une surface passe par une courbe gauche.*

M. Bourlet adresse un Mémoire *Sur les transmutations.*

M. Beudon adresse un Mémoire *Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles.*

M. Lémeray adresse la Note suivante :

Dérivée des fonctions itératives par rapport à l'indice d'itération.

Soit la fonction $y_1 = fy$ et ses puissances successives, $y_i = f^i y$

correspondant à la valeur $x+i$ de l'indice d'itération. On ne sait pas le plus souvent obtenir la dérivée de y par rapport à x; mais on peut l'exprimer au moyen d'un produit calculable quel que soit x, et convergent pourvu que la substitution y, fy tende vers une limite Y qui est, comme l'on sait, racine de l'équation $fy-y=0$. Supposons de plus la convergence *régulière,* et considérons d'abord le cas où la dérivée de la fonction f au point limite a une valeur a inférieure à l'unité; on sait qu'alors la fonction

$$(1) \qquad \frac{y_i-\mathrm{Y}}{a^i}$$

tend vers une limite déterminée pour i infini. Cette limite est la même que celle de

$$(2) \qquad \frac{1}{a^i \mathrm{L}a}\,\frac{dy_i}{di}.$$

Les limites de (1) et (2) sont identiques respectivement à

$$(1') \qquad (y-\mathrm{Y})\prod_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{a}\,\frac{y_i-\mathrm{Y}}{y_{i-1}-\mathrm{Y}}, \qquad (2') \qquad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{L}a}\prod_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{a}\,\frac{dy_i}{dy_{i-1}},$$

A désignant $\frac{dy_i}{di}$ pour $i=0$; c'est-à-dire $\frac{dy}{dx}\cdot$ Donc

$$\frac{dy}{dx}=(y-\mathrm{Y})\,\mathrm{L}a\prod_{i=1}^{i=\infty}\frac{y_i-\mathrm{Y}}{y_{i-1}-\mathrm{Y}}\left(\frac{dy_i}{dy_{i-1}}\right)^{-1},$$

expression évidemment convergente dans les hypothèses faites.

Supposons maintenant généralement que, pour $y=\mathrm{Y}$, les $p-1$ premières dérivées de $fy-y$ par rapport à y s'annulent. La substitution y, fy peut alors être ou divergente, ou convergente; supposons qu'il y ait convergence. On sait qu'alors (¹)

$$\lim i(y_i-\mathrm{Y})^{p-1}=\frac{-p!}{\mathrm{P}(p-1)},$$

P étant la valeur, supposée différente de zéro, de la dérivée $p^{\text{ième}}$

(¹) *Un théorème sur les fonctions itératives.* (*Bull. de la Soc. math.*, t. XXIII, 1895.)

au point limite. Or les deux expressions

$$(3) \qquad i(y_i - \mathrm{Y})^{p-1}, \qquad -i^2(p-1)(y_i - \mathrm{Y})^{p-2}\frac{dy_i}{di}$$

ont la même limite; il en sera de même si l'on y remplace les facteurs i et $-i^2$ par $i+1$ et $-(i+1)^2$; les limites des produits ainsi obtenus sont respectivement identiques à

$$(y-\mathrm{Y})^{p-1}\prod_{i=1}^{i=\infty}\frac{i+1}{i}\left(\frac{y_i - \mathrm{Y}}{y_{i-1}-\mathrm{Y}}\right)^{p-1},$$

$$\mathrm{A}(p-1)(y-\mathrm{Y})^{p-2}\prod_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{i+1}{i}\right)^2\frac{y_i-\mathrm{Y}}{y_{i-1}-\mathrm{Y}}\frac{dy_i}{dy_{i-1}}.$$

On a donc une première expression

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \mathrm{A} = \frac{-1}{p-1}(y-\mathrm{Y})\prod_{i=1}^{i=\infty}\frac{i}{i+1}\frac{y_i-\mathrm{Y}}{y_{i-1}-\mathrm{Y}}\left(\frac{dy_i}{dy_{i-1}}\right)^{-1}.$$

En tenant compte de la valeur de la limite, on a aussi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p!}{\mathrm{P}(p-1)^2}\frac{1}{(y-\mathrm{Y})^{p-2}}\prod_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{i}{i-1}\right)^2\frac{y_{i-1}-\mathrm{Y}}{y_i-\mathrm{Y}}\left(\frac{dy_i}{dy_{i-1}}\right)^{-1}.$$

Il convient de remarquer que si le produit (3) tend vers une limite, il en sera de même pour le produit obtenu en y remplaçant le facteur i par $i+j$, j étant un nombre quelconque fini et que nous supposerons entier. On pourra donc remplacer dans l'expression (4), par exemple, $\frac{i}{i+1}$ par $\frac{i+j}{i+j+1}$. Si l'on veut s'en servir pour calculer la valeur de la dérivée, on pourra, en appelant A_1 une valeur approchée de A et supposée connue, déterminer j en posant

$$\mathrm{A}_1 = \frac{-1}{p-1}(y-\mathrm{Y})\frac{1}{r+1},$$

et en prenant pour j l'entier le plus voisin de r. Le produit Π joue alors le rôle d'un facteur correctif.

Ces formules donnent la dérivée indépendamment de x.

M. E. Goursat adresse la Note suivante :

Sur les équations linéaires qui admettent quatre intégrales liées par une relation quadratique.

Dans un article récent (voir *Bulletin*, t. XXV, p. 36-48), j'ai signalé une propriété des équations linéaires du second ordre, qui sont telles que l'on peut passer de l'équation à son adjointe par une transformation (m, n) de M. Darboux, et j'ai considéré en particulier les équations (E) dont l'adjointe (E′) se déduit de (E) par une transformation de Laplace. Il me paraît intéressant de faire remarquer que les équations linéaires, admettant *quatre* intégrales linéairement distinctes, liées par une relation quadratique, qui jouent un si grand rôle dans la théorie des surfaces, appartiennent à la classe générale dont je viens de rappeler la propriété; ce qui fournit en même temps la raison la plus simple d'une propriété curieuse de ces équations.

Soit (E) une équation linéaire du second ordre

$$\text{(E)} \qquad s + ap + bq + cz = 0,$$

et soit (E′) son adjointe

$$\text{(E}'\text{)} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) v = 0.$$

Si l'on passe de l'équation (E) à l'équation (E′) par une transformation (m, n), l'intégrale générale de l'équation (E′) est de la forme

$$\text{(1)} \qquad v = A_1\frac{\partial z}{\partial x} + \ldots + A_m\frac{\partial^m z}{\partial x^m} + B_1\frac{\partial z}{\partial y} + \ldots + B_n\frac{\partial^n z}{\partial y^n} + Cz,$$

$A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n, C$ étant des fonctions déterminées de x, y et z l'intégrale générale de l'équation (E). On en déduit immédiatement que, *si la suite de Laplace relative à l'équation* (E) *se termine dans un sens, elle se termine aussi dans l'autre sens*. Supposons, par exemple, que la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine du côté des indices positifs après r transformations; cette équation admet donc une intégrale de la forme

$$z = \alpha X + \alpha_1 X' + \ldots + \alpha_r X^{(r)},$$

$\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ étant des fonctions déterminées de x, y, X une fonction arbitraire de x, et X', ..., $X^{(r)}$ ses dérivées. Si l'on substitue cette valeur de z dans la formule (1), on en conclut que l'équation (E) admet une intégrale de même forme

$$v = \beta X + \beta_1 X' + \ldots + \beta_{m+r} X^{(m+r)};$$

la suite de Laplace relative à l'équation (E') se termine donc, du côté des indices positifs, après $m + r$ transformations au plus. Par suite, d'après les relations qui existent entre une équation linéaire et son adjointe, la suite de Laplace relative à l'équation (E) doit se terminer, du côté des indices négatifs, après $m + r$ transformations au plus.

Rappelons encore les propriétés suivantes des équations linéaires ([1]). Soient x, y, z, t quatre intégrales linéairement distinctes d'une équation (E)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} + a \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + b \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + c\theta = 0, \tag{2}$$

où nous désignerons par ρ, ρ_1 les variables indépendantes; si l'on considère x, y, z, t comme les coordonnées homogènes d'un point, ce point décrit une surface (Σ), sur laquelle les courbes $\rho =$ const. et $\rho_1 =$ const. forment un réseau conjugué. Soient u, v, w, p les coordonnées tangentielles homogènes de la surface (Σ), qui sont liées aux premières par les relations

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & ux + vy + wz + pt = 0, \\ & u \frac{\partial x}{\partial \rho} + v \frac{\partial y}{\partial \rho} + w \frac{\partial z}{\partial \rho} + p \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0, \\ & u \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + v \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + w \frac{\partial z}{\partial \rho_1} + p \frac{\partial t}{\partial \rho_1} = 0; \end{aligned} \right.$$

u, v, w, p satisfont à une équation linéaire de même forme (G)

$$\frac{\partial U^2}{\partial \rho\, \partial \rho_1} + a_1 \frac{\partial U}{\partial \rho} + b_1 \frac{\partial U}{\partial \rho_1} + c_1 U = 0, \tag{4}$$

et, si l'on désigne par U l'intégrale générale de cette équation (4), l'intégrale générale de l'équation (E') adjointe de (E) est l'expression (2, 2) définie par la condition de s'annuler pour $U = u$, v,

---

([1]) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 184-190.

w, p, c'est-à-dire

$$\left|\begin{array}{ccccc} U & \dfrac{\partial U}{\partial \rho} & \dfrac{\partial U}{\partial \rho_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho_1^2} \\ u & \dfrac{\partial u}{\partial \rho} & \dots & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} \\ v & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p & \dfrac{\partial p}{\partial \rho} & \dots & \dots & \dfrac{\partial^2 p}{\partial \rho_1^2} \end{array}\right|.$$

La démonstration de la propriété que nous avions en vue est maintenant bien facile. Supposons que l'équation (3) admette quatre intégrales linéairement distinctes, liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants et à discriminant différent de zéro. Nous pouvons admettre que cette relation a été mise sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \tag{5}$$

x, y, z, t étant quatre intégrales distinctes. On déduit de la relation (5)

$$x\frac{\partial x}{\partial \rho} + y\frac{\partial y}{\partial \rho} + z\frac{\partial z}{\partial \rho} + t\frac{\partial t}{\partial \rho} = 0,$$
$$x\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + y\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + z\frac{\partial z}{\partial \rho_1} + t\frac{\partial t}{\partial \rho_1} = 0,$$

et, en comparant avec les formules (3), on voit que l'on peut prendre

$$u = x, \qquad v = y, \qquad w = z, \qquad p = t,$$

de sorte que l'équation (4) sera identique à l'équation (3). L'intégrale générale de l'équation (E′) adjointe de (E) est donc fournie par l'expression (2, 2) écrite plus haut, où U est l'intégrale générale de l'équation (E) elle-même. D'après la remarque générale faite en commençant, on en conclut que, si la suite de Laplace, relative à l'équation (2), se termine dans un sens après n opérations, elle se termine dans l'autre sens après $n+2$ opérations au plus.

On voit que cette propriété se déduit, au fond, de cette remarque bien simple, qu'un système conjugué tracé sur une quadrique est à lui-même son propre corrélatif.