BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BRICARD

Étude géométrique d'un déplacement remarquable et d'un hyperboloïde articulé

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 98-108
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__98_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE D'UN DÉPLACEMENT REMARQUABLE ET D'UN HYPERBOLOÏDE ARTICULÉ.

Par M. Raoul Bricard.

I.

Dans une Note présentée récemment à l'Académie des Sciences [1], j'ai dit quelques mots de la déformabilité propre à la figure constituée par les génératrices d'un même système et deux sections circulaires parallèles d'un hyperboloïde, ces diverses lignes étant supposées rigides et articulées en leurs points de rencontre.

Je me propose, dans cette étude, de revenir sur cette figure et d'en signaler les propriétés les plus intéressantes.

Je commencerai par établir le théorème suivant qui, peut-être, a déjà été remarqué :

Deux sections circulaires parallèles d'un hyperboloïde sont divisées semblablement par les génératrices d'un même système.

Considérons, d'abord, deux coniques quelconques C et C′ tracées sur un hyperboloïde. Les génératrices d'un même système divisent homographiquement ces deux coniques; en effet, par un point m pris sur l'une des coniques, on ne peut mener qu'une génératrice du système considéré, et cette génératrice rencontre la seconde conique en un point unique m'. Il existe donc une correspondance uniforme entre les points m et m' des coniques C et C′, et l'on sait qu'une telle correspondance est nécessairement homographique.

Si a et a' sont les points d'intersection des deux coniques, chacune de ces points est son propre homologue dans cette correspondance homographique.

[1] *Comptes rendus des séances*, t. CXXIII, p. 939.

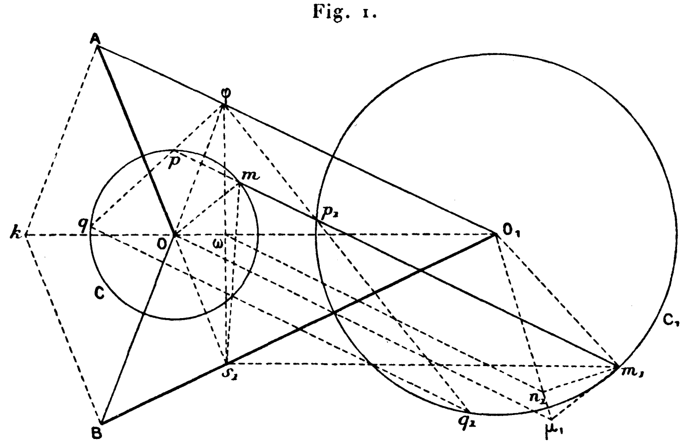
Supposons, maintenant, que les coniques C et C′ soient deux cercles situés dans des plans parallèles P et P′. Les points a et a' deviennent les points cycliques, confondus deux à deux, des plans P et P′; les deux divisions homographiques, déterminées sur les deux cercles par les génératrices d'un même système de l'hyperboloïde, sont donc telles que les points cycliques du plan P, points qui appartiennent à la première division, aient pour homologues, dans la deuxième division, les points cycliques du plan P′. On sait que, dans ces conditions, les deux divisions sont *semblables,* et le théorème est démontré [1].

On verrait de même que, réciproquement, *les droites qui joignent deux à deux les points homologues de deux divisions semblables, tracées sur des cercles dont les plans sont parallèles, sont les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde qui contient ces deux cercles.*

Je donnerai de cette réciproque la démonstration suivante, qui est plus longue mais qui rend mieux compte de la génération de l'hyperboloïde.

Prenons comme plan de la figure (*fig.* 1) le plan P du cercle C.

Fig. 1.



La projection du cercle C′ sur le plan est un cercle C_1 (d'une

(¹) On peut encore donner de cette proposition l'élégante démonstration suivante qu'a bien voulu me communiquer M. Mannheim :

Projetons les sections circulaires de l'hyperboloïde sur le plan de l'une d'elles, manière générale, je désignerai par une lettre affectée d'un accent un point ou une ligne appartenant au plan P′, et par la même lettre affectée de l'indice 1 la projection de ce point ou de cette ligne sur le plan P). Appelons O et O′ les centres des deux cercles.

Soient m, m' deux points homologues quelconques de deux divisions semblables tracées sur les deux cercles. Menons par le point O une droite parallèle à mm'. Cette droite rencontre le plan P′ en un point μ' tel que les longueurs $O\mu'$, mm' soient égales.

Quand le point m se déplace sur le cercle C, le triangle $O'm'\mu'$ reste de grandeur invariable; en effet, ses côtés $O'm'$ et $\mu'm'$ sont égaux respectivement aux rayons des cercles C′ et C; de plus, l'angle en m' de ce triangle est égal à l'angle, constant par hypothèse, que font entre elles les directions Om et $O'm'$.

Soit maintenant n' la projection du point m' sur $O'\mu'$. Par n' menons à mm' une parallèle qui rencontre la droite OO' au point ω. Il est clair que la longueur du segment $O'n'$ est constante, et que, par suite, le point n' décrit une circonférence de centre O′, quand on fait varier la position du point m sur le cercle C. Quant au point ω, il est fixe, car il divise OO' dans un rapport égal au rapport constant $\frac{n'\mu'}{n'O'}$.

La droite $\omega n'$ engendre donc un cône R, à base circulaire. Sa trace sur le plan P′ du plan tangent à ce cône le long de la génératrice $\omega n'$ est la droite $n'm'$, tangente au cercle lieu du point n'.

Considérons l'hyperboloïde H qui a le cône R pour cône asymptote et qui passe par le point m'. La trace de cet hyperboloïde sur le plan P′ est le cercle C′, homothétique par rapport au point O′ de la section faite par le même plan dans le cône R. Par le point m' passe une génératrice de H parallèle à la droite $\omega n'$, génératrice de contact du cône R avec l'un des plans tangents menés à ce cône par le point m'. Cette génératrice se confond donc avec mm'.

---

les projetantes étant parallèles au diamètre conjugué de ce plan dans l'hyperboloïde; nous obtenons des circonférences concentriques.

L'une de ces courbes est la projection du cercle qui forme contour apparent; les génératrices ont pour projections des tangentes à ce cercle; il est alors bien évident qu'elles déterminent des divisions semblables sur les autres sections circulaires de la surface.

En d'autres termes, la droite mm' engendre un hyperboloïde H dont le cône asymptote est R et dont le centre est par conséquent le point ω.

Pour déterminer le centre ω, sans avoir à construire une génératrice particulière de l'hyperboloïde, on peut recourir à la considération du *centre de similitude* S_1 des deux divisions tracées sur les cercles C et C_1. Ce point, comme on sait, est unique et jouit des propriétés suivantes :

1° Le rapport $\frac{OS_1}{O_1S_1}$ est égal au rapport des rayons des deux cercles;

2° Si m et m_1 sont deux points homologues quelconques des deux divisions, le triangle mS_1m_1 est semblable au triangle OS_1O_1;

3° L'angle constant que font entre elles les directions Om, O_1m_1 est égal à l'angle OS_1O_1.

Il résulte de la première et de la troisième propriété que le triangle $\mu_1m_1O_1$ est aussi semblable au triangle OSO_1. Les points n_1 et ω_1 tels que l'on ait

$$\frac{n_1\mu_1}{n_1O_1} = \frac{\omega O}{\omega O_1}$$

sont homologues dans ces deux triangles et, par suite, *le point* ω *est la projection du point* S_1 *sur* OO_1, ce qui détermine le centre de l'hyperboloïde H en projection horizontale.

Nous disons que les droites mm' sont les génératrices *du premier système* de H. Il est intéressant de déterminer les génératrices du second système.

Le plan projetant sur le plan P l'une quelconque de ces génératrices coupe l'hyperboloïde H suivant deux droites et contient, par suite, une génératrice du premier système; les projections des génératrices des deux systèmes sont donc confondues deux à deux. Cherchons, par exemple, la génératrice du second système qui se projette en mm_1. Elle contient nécessairement le point p et le point p', projetés respectivement aux seconds points d'intersection de la droite mm_1 avec les cercles C et C_1. C'est donc la droite pp'.

Les points p et p', intersections des cercles C et C' avec les génératrices d'un même système de l'hyperboloïde H, doivent encore appartenir à des divisions semblables tracées sur ces deux cercles : on vérifie immédiatement ce fait en remarquant que les firoites Op et O_1p_1, dont les inclinaisons sur mm_1 sont respectivement les mêmes que celles des droites Om et O_1m_1, font entre elles un angle égal à celui de ces dernières droites. On voit aussi que le centre de similitude des divisions (p), (p_1) est le point φ, symétrique du point S_1 par rapport à OO_1.

II.

Je vais maintenant établir la déformabilité de l'hyperboloïde H, dans les conditions énoncées au début de cette étude.

Fixons le cercle C et déplaçons le cercle invariable C' de manière que son plan P' reste parallèle au plan P et que *trois* de ses points, a', b', c', restent respectivement à des distances constantes des points homologues a, b, c, qui appartiennent au cercle C.

Ce déplacement est possible et déterminé, puisque le cercle C' est ainsi assujetti à *cinq* conditions.

Soit m' un point quelconque du cercle C'. Je vais montrer que le plan normal à sa trajectoire (m') passe constamment par le point fixe m, qui est son homologue sur le cercle C.

Considérons, en effet, le cercle C' dans l'une de ses positions, et déplaçons-le infiniment peu de toutes les manières possibles, en supprimant un moment l'obligation pour le plan P' de rester parallèle au plan P (condition *double*). Le cercle C' n'est plus assujetti qu'à trois conditions, et ce déplacement est *doublement* indéterminé : on peut donner une direction arbitraire à un point lié à ce cercle.

Mais il y a exception [1] pour tous les points de l'hyperboloïde défini par les trois droites aa', bb', cc', c'est-à-dire de l'hyperboloïde H et, en particulier, pour les points du cercle C'. Tous ces points décrivent des éléments de surfaces trajectoires, quel que soit le déplacement infinitésimal de cercle C'. La normale au point m', à la surface trajectoire de ce point, est la génératrice $m'm$ de l'hyperboloïde H.

---

[1] MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 313.

Rétablissons maintenant la condition double supprimée. Pour un déplacement infiniment petit du cercle C′, la trajectoire du point m' appartient à la surface trajectoire dont nous avons reconnu l'existence.

Le plan normal à cette trajectoire, au point m', contient donc la droite $m'm$ et passe par le point m.

Les droites $m'm$, dans leur nouvelle position, forment encore un hyperboloïde, puisque les plans P et P′ n'ont pas cessé d'être parallèles ; on peut donc appliquer le même raisonnement à un nouveau déplacement infiniment petit du plan P′.

En passant au déplacement fini, on voit que le plan normal à la trajectoire du point m' passe bien par le point fixe m, comme il avait été annoncé. Cette trajectoire appartient donc à une sphère dont le centre est en m, et la distance mm' reste constante. Il en est de même pour tous les segments de génératrices de l'hyperboloïde H, compris entre des points homologues des cercles C et C′. On peut énoncer ainsi qu'il suit le résultat obtenu :

Les deux cercles C *et* C′ *étant supposés rigides, joignons deux à deux leurs points homologues par des tiges également rigides, articulées en ces points; le système ainsi obtenu est déformable. Pendant sa déformation, les plans des cercles* C *et* C′ *restent constamment parallèles et les tiges mm' ne cessent pas d'appartenir à un hyperboloïde.*

III.

Fixant toujours le cercle C, nous allons chercher à définir aussi complètement que possible le déplacement du cercle C′. A cet effet, traçons les droites $O\varphi$, $O_1\varphi$, respectivement symétriques des droites OS_1, O_1S_1 par rapport à la droite OO_1. Soient A le point de rencontre des droites OS_1, $O_1\varphi$; B le point de rencontre des droites $O\varphi$, O_1S_1. *Le quadrilatère* $AOBO_1$ *a ses côtés de longueurs constantes.*

Pour le faire voir, remarquons d'abord qu'on a les égalités

$$\frac{AO}{AO_1} = \frac{S_1O}{S_1O_1}, \tag{1}$$

$$\frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{OS_1}} = \frac{\overline{AO_1}^2 - \overline{AO}^2}{AO}. \tag{2}$$

La première de ces égalités résulte de ce que OO_1 est bissectrice de l'angle AO_1S_1.

Pour démontrer l'égalité (2), désignons par K le quatrième sommet du losange construit sur les droites AO, OB. Les trois points O_1, O, K sont en ligne droite et les triangles AKO_1, S_1OO_1 sont semblables, en vertu des égalités d'angles

$$\widehat{AO_1O} = \widehat{OO_1S_1}, \qquad \widehat{AKO_1} = \widehat{AOK} = \widehat{S_1OO_1}.$$

On a donc la relation

$$\frac{O_1O}{OS_1} = \frac{O_1K}{AK} = \frac{O_1K}{AO},$$

d'où

$$\frac{\overline{O_1O}^2}{OS_1} = \frac{O_1O.O_1K}{AO}.$$

Mais le produit $O_1O.O_1K$ n'est autre chose que la puissance du point O_1 par rapport au cercle de centre A et de rayon AO. En le remplaçant alors dans l'égalité précédente par sa valeur $\overline{AO_1}^2 - \overline{AO}^2$, on obtient bien l'égalité (2).

Cela établi, considérons une nouvelle position C'', projetée en C_2, du cercle C' dans le déplacement dont on a reconnu l'existence. Soit m'' la nouvelle position du point m', m_2 la projection de m'' sur le plan P; soit encore S_2 le centre de similitude des cercles C et C_2 (ces points ne sont pas marqués sur la figure).

On a l'égalité

$$mm' = mm'',$$

d'où

$$\overline{mm'}^2 = \overline{mm''}^2$$

et

$$\overline{mm_1}^2 + z_1^2 = \overline{mm_2}^2 + z_2^2,$$

en désignant par z_1 et z_2 les distances respectives des plans P' et P'' au plan P. On tire de là

$$\overline{mm_1}^2 - \overline{mm_2}^2 = z_2^2 - z_1^2,$$

le second membre étant indépendant de la position du point m sur le cercle C. Or on a, d'après les propriétés connues du centre de similitude,

$$mm_1 = \frac{OO_1}{S_1 O} S_1 m, \qquad mm_2 = \frac{OO_2}{S_2 O} S_2 m,$$

et, par suite,

$$\frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{S_1 O}^2} \overline{S_1 m}^2 - \frac{\overline{OO_2}^2}{\overline{S_2 O}^2} \overline{S_2 m}^2 = z_2^2 - z_1^2.$$

Ceci devant avoir lieu, quelle que soit la position du point m sur le cercle C, il faut que le cercle se confonde avec le lieu des points m dont les distances aux points S_1 et S_2 satisfont à la relation précédente. En raison de théorèmes bien connus, cela exige que le point O soit situé sur la droite $S_1 S_2$, et aussi que l'on ait l'égalité

$$\frac{\dfrac{\overline{OO_1}^2}{\overline{S_1 O}^2}}{S_2 O} = \frac{\dfrac{\overline{OO_2}^2}{\overline{S^2 O}^2}}{S_1 O},$$

ou

$$\frac{\overline{OO_1}^2}{S_1 O} = \frac{\overline{OO_2}^2}{S_2 O}.$$

Nous avons considéré deux positions successives du cercle C_2. On peut supposer que la seconde est fixe; alors les résultats obtenus s'exprimeront de la manière suivante :

1° Pendant le déplacement du cercle C_1, le point S_1 décrit une droite passant par le point O; en d'autres termes *la droite* OA *est fixe en direction;*

2° On a la relation

$$\frac{\overline{OO_1}^2}{S_1 O} = \text{const.},$$

à laquelle il faut ajouter

$$\frac{S_1 O}{S_1 O_1} = \frac{R}{R_1},$$

R et R_1 désignant les rayons des cercles C et C_1.

En nous reportant alors aux relations (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{AO}{AO_1} = \frac{R}{R_1}, \qquad \frac{\overline{AO_1}^2 - \overline{AO}^2}{AO} = \text{const.},$$

ce qui établit bien la constance des longueurs AO, AO_1, et aussi des longueurs BO, BO_1, qui leur sont respectivement égales. Il est aussi démontré que le quadrilatère $AOBO_1$ a ses côtés de longueurs invariables.

On peut enfin ajouter la remarque suivante : la droite OA, avons-nous dit, reste fixe pendant le déplacement du cercle C_1 ; si l'on considérait le déplacement inverse, on verrait de la même manière que la droite O_1B, qui joue, par rapport au cercle C_1, le même rôle que la droite OA par rapport au cercle C, serait alors immobile. En d'autres termes, *le cercle* C_1 *est invariablement lié à la droite* O_1S_1.

Nous résumerons ainsi les résultats obtenus :

Soit $AOBO_1$ *un quadrilatère articulé, tel que ses côtés* AO *et* BO *soient égaux entre eux, ainsi que les côtés* AO_1 *et* BO_1 (spear-head *ou* kite *des géomètres anglais*). C *et* C_1 *sont deux cercles de centres* O *et* O_1, *dont les rayons sont proportionnels aux côtés* AO, AO_1, *auxquels ils sont respectivement liés. On fixe le côté* AO *et l'on déforme le quadrilatère. Le déplacement qui en résulte pour le cercle* C_1 *est identique à celui qui résulte de la déformation de l'hyperboloïde* H *considéré précédemment.*

Quant au cercle C′, il est lié à un cylindre de révolution ayant pour section droite le cercle C_1, entraîné dans le déplacement de ce cercle, mais ayant la faculté de glisser le long de ses génératrices.

On achève de déterminer le déplacement de C′ en obligeant un de ses points à rester à distance constante d'un point homologue du cercle C.

Remarque. — Pour une position quelconque du cercle C_1, le centre instantané de rotation de la figure entraînée dans le déplacement de ce cercle est le point φ, situé à l'intersection des droites OB, AO_1, qui sont normales aux trajectoires des points B et O_1 liés à ce cercle. Le point φ' du plan P′ qui est projeté en φ est le foyer de ce plan, puisque son déplacement infiniment petit lui est normal.

On peut obtenir directement ce résultat en appliquant les propriétés connues relatives au déplacement infinitésimal d'un plan [1].

Soit pp' une génératrice D du second système de H. Proposons-nous de trouver la droite Δ conjuguée de D relativement au déplacement infiniment petit du plan P'. Une génératrice quelconque du premier système, étant normale à la trajectoire d'un certain point du plan P' et rencontrant la droite D, doit aussi rencontrer la droite Δ. Il en résulte que Δ est, comme D, une génératrice du second système.

En outre, les projections des droites D et Δ sur le plan P' doivent se couper en un point de la caractéristique de ce plan. Mais cette caractéristique est à l'infini, puisque le plan P' reste constamment parallèle au plan P. Les projections en question sont donc parallèles.

Il est dès lors très facile de construire la droite Δ : soient q et q_1 les points où les droites φp et φp_1 rencontrent de nouveau les cercles C et C_1. Comme on l'a remarqué précédemment (§ I), les points p et p_1 appartiennent à deux divisions semblables tracées sur les cercles C et C_1 et dont le centre de similitude est le point φ, symétrique du point S par rapport à OO_1. Les points q et q_1, situés, l'un sur la droite φp, l'autre sur la droite φp_1, sont nécessairement homologues. Le triangle φpp_1 est donc semblable au triangle φqq_1, et la droite qq_1 est parallèle à pp_1.

Par conséquent, la génératrice qq_1 du second système, projetée en qq_1, est la droite Δ cherchée.

Quand on fait varier le couple de droites conjuguées D, Δ, la droite qui joint leurs traces sur le plan P' passe constamment par le foyer de ce plan. Mais cette droite est $p'q'$, qui passe constamment par le point φ' projeté en φ. On retrouve donc bien que φ' est le foyer du plan P.

IV.

Il est un cas auquel la définition trouvée pour le déplacement du cercle C_1 cesse de s'appliquer : c'est celui où les rayons R et R_1 sont égaux; en effet, les droites OA, O_1B, OB, O_1A deviennent alors parallèles deux à deux et les côtés du quadrilatère $AOBO_1$

---

[1] MANNHEIM, *loc. cit.*, p. 123.

sont tous de longueurs infinies. Voici comment les conclusions doivent être modifiées :

Le point A s'éloignant à l'infini sur la droite fixe OA, le point O_1 décrit alors une droite perpendiculaire à OA.

Le déplacement du cercle C_1 peut être obtenu par le roulement d'une certaine courbe Γ_1, liée à ce cercle, sur une courbe fixe Γ. Comme le déplacement inverse lui est nécessairement identique, il faut que les courbes Γ et Γ_1 soient égales et constamment symétriques par rapport à leur tangente commune. En adjoignant à cette condition l'obligation pour le point O_1 de décrire une droite, on voit facilement que les courbes Γ et Γ_1 sont deux paraboles, ayant leurs foyers respectivement en O et en O_1. Le point de contact de ces deux paraboles est au point φ, symétrique du point S_1 par rapport à OO_1, puisque ce point, on l'a vu, est le centre instantané de rotation de la figure invariable entraînée par le cercle C_1.

Donc, dans ce cas particulier, le déplacement du cercle C' peut être obtenu en liant ce cercle à un cylindre parabolique qui roule sur un cylindre égal en lui restant toujours symétrique par rapport au plan tangent commun, et qui, de plus, reçoit un glissement le long de ses génératrices.