M. DE MONTCHEUIL

Étude des surfaces définies par l'équation
$R + R' = F(u) + F_1(u_1)$

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 103-114
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__103_0>

ÉTUDE DES SURFACES DÉFINIES PAR L'ÉQUATION

$R + R' = F(u) + F_1(u_1)$;

Par M. DE MONTCHEUIL.

M. Sophus Lie a envisagé les surfaces minima comme le lieu décrit par le milieu d'un segment, qui s'appuie sur deux courbes minima. Ce mode de génération traduit une propriété géométrique, commune à toutes les surfaces définies par l'équation

$$(1) \qquad R + R' = 0,$$

R, R' étant les rayons de courbure de ces surfaces.

Nous nous proposons de définir un mode de génération de surfaces, analogue à celui de M. Lie, mais plus général, qui caractérisera l'ensemble des surfaces définies par l'équation

$$(2) \qquad R + R' = F(u) + F_1(u_1),$$

où F, F_1 sont des fonctions quelconques des variables u, u_1, définies elles-mêmes par les relations

$$c = \frac{u + u_1}{uu_1 + 1}, \qquad c' = i\,\frac{u_1 - u}{uu_1 + 1}, \qquad c'' = \frac{uu_1 - 1}{uu_1 + 1};$$

c, c', c'' représentent ici les cosinus directeurs de la normale aux surfaces, qui donnent les solutions de l'équation (2), dont l'équation (1) est un cas particulier.

Intégration de l'équation (2). — Soit ξ la quantité qui figure dans l'équation du plan tangent aux surfaces

$$(u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + \xi = 0.$$

Considérons l'équation

$$(2)' \qquad \frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2\, \partial u_1^2} = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est donnée par la formule

$$\xi = A u_1 + A_1 u + B + B_1,$$

où A, B représentent les fonctions de u, A_1, B_1 des fonctions de u_1.

Or on a, pour somme des rayons de courbure, l'expression

$$R + R' = \xi - u\frac{\partial\xi}{\partial u} - u_1\frac{\partial\xi}{\partial u_1} + (1 + uu_1)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1}$$

qui devient ici

$$R + R' = (B - uB' + A') + (B_1 - u_1B'_1 + A'_1) = F(u) + F_1(u_1).$$

On retrouve ainsi l'équation (2), qui peut être considérée comme définissant des intégrales intermédiaires de l'équation (2)'.

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *La solution générale de l'équation* (2), *où* F, F_1 *représentent, respectivement, des fonctions quelconques de* u *et de* u_1 *est la même que celle de l'équation* (2)'.

Notre étude est donc ramenée à celle de cette dernière équation.

Mode de génération des surfaces définies par l'équation

$$\frac{\partial^4\xi}{\partial u^2\,\partial u_1^2} = 0.$$

Prenons, pour point de départ, la congruence de droites définie comme il suit :

Soient deux plans mobiles, dont les paramètres dépendent respectivement des variables α, α_1

$$\begin{aligned} A\,x + B\,y + C\,z + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sur chacune des développables, enveloppes de ces plans, traçons une courbe quelconque. Si nous prenons un point sur chaque courbe, par ces deux points M, M_1 passent deux plans tangents aux développables, qui se coupent suivant une droite Γ. Cela posé, considérons une droite passant par le milieu du segment rectiligne, dont les extrémités M, M_1 décrivent les courbes données, et menons cette droite parallèlement à la droite Γ. La droite ainsi définie dépend de deux paramètres variables et constitue, par conséquent, l'élément d'une congruence. C'est cette congruence que nous considérons.

Cherchons la condition pour que les droites de cette congruence soient normales à une famille de surfaces.

Les cosinus directeurs de ces normales sont proportionnels aux quantités

$$u+u_1, \quad i(u_1-u), \quad uu_1-1,$$

u, u_1 ayant la signification indiquée plus haut.

On a donc les relations

$$\begin{aligned} A\,(u+u_1)+iB\,(u_1-u)+C\,(uu_1-1)&=0,\\ A_1(u+u_1)+iB_1(u_1-u)+C_1(uu_1-1)&=0;\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} A&=(1-u^2)\lambda, & A_1&=(1-u_1^2)\lambda_1,\\ B&=i(1+u^2)\lambda, & B_1&=-i(1+u_1^2)\lambda_1,\\ C&=2u\lambda, & C_1&=2u_1\lambda_1.\end{aligned}$$

Ces équations montrent, d'abord, que α, α_1 sont, respectivement, fonctions de u et de u_1. Nous poserons désormais

$$\alpha=u, \qquad \alpha_1=u_1.$$

Elles nous permettent, ensuite, d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si par le milieu d'un segment rectiligne, dont les extrémités* M, M_1 *décrivent deux courbes quelconques de l'espace, nous menons une droite* D, *parallèle à l'intersection des plans tangents,* M, M_1 *à deux développables, contenant respectivement les deux courbes, la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence des droites* D, *ainsi définies, soit normale à une famille de surfaces est que les développables données soient des développables isotropes.*

Nous allons démontrer que les surfaces normales à la congruence sont bien les surfaces définies par l'équation (2)'.

Si nous appelons *développée moyenne* la surface lieu du milieu du segment focal d'une congruence normale à une famille de surfaces, cette développée a ses coordonnées définies par les équations

$$x_0 = \frac{1}{2}\left[(u+u_1)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - \frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial u_1}\right],$$
$$y_0 = \frac{i}{2}\left[(u_1-u)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - \frac{\partial\xi}{\partial u} + \frac{\partial\xi}{\partial u_1}\right],$$
$$z_0 = \frac{1}{2}\left[\xi - u\frac{\partial\xi}{\partial u} - u_1\frac{\partial\xi}{\partial u} + (uu_1-1)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1}\right].$$

On a ici

$$\xi = \mathrm{A}u_1 + \mathrm{A}_1 u + \mathrm{B} + \mathrm{B}_1;$$

d'où

$$x_0 = \frac{1}{2}(\ u\mathrm{A}' - \mathrm{A} - \mathrm{B}' + u_1\mathrm{A}'_1 - \mathrm{A}_1 - \mathrm{B}'_1),$$
$$y_0 = \frac{i}{2}(-u\mathrm{A}' + \mathrm{A} - \mathrm{B}' + u_1\mathrm{A}'_1 - \mathrm{A}_1 + \mathrm{B}'_1),$$
$$z_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{B} - u\mathrm{B}' - \mathrm{A}' + \mathrm{B}_1 - u_1\mathrm{B}'_1 - \mathrm{A}'_1).$$

Or ces équations définissent les coordonnées du milieu du segment rectiligne, dont les extrémités décrivent les courbes absolument quelconques

$$\begin{aligned} &\mathrm{X} = u\mathrm{A}' - \mathrm{A} - \mathrm{B}', && \mathrm{X}_1 = u_1\mathrm{A}'_1 - \mathrm{A}_1 - \mathrm{B}'_1,\\ &\mathrm{Y} = -\,i(u\mathrm{A}' - \mathrm{A} + \mathrm{B}'), && \mathrm{Y}_1 = i(u_1\mathrm{A}'_1 - \mathrm{A}_1 + \mathrm{B}'_1),\\ &\mathrm{Z} = \mathrm{B} - u\mathrm{B}' - \mathrm{A}', && \mathrm{Z}_1 = \mathrm{B}_1 - u_1\mathrm{B}'_1 - \mathrm{A}'_1. \end{aligned}$$

On vérifie que les développables isotropes qui contiennent ces courbes sont les enveloppes des plans

$$(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2u\ z + 2(\mathrm{A} - u\ \mathrm{B}) = 0,$$
$$(1-u_1^2)x - i(1+u_1^2)y + 2u_1 z + 2(\mathrm{A}_1 - u_1\mathrm{B}_1) = 0.$$

Cela posé, considérons les normales aux surfaces définies par $(2)'$. Elles passent par le milieu du segment rectiligne; puisque les coordonnées x_0, y_0, z_0 du milieu de ce segment sont, en même temps, celles du milieu du segment focal des normales. De plus, les paramètres directeurs de ces normales

$$u + u_1,\quad i(u_1 - u),\quad uu_1 - 1,$$

sont proportionnels à ceux de l'intersection des plans tangents aux développables, comme on peut s'en assurer. Le mode de génération indiqué donne donc bien les surfaces définies par $(2)'$.

Nous pouvons dès lors énoncer ce théorème :

Théorème. — *Les surfaces normales à la congruence, que nous venons de définir, sont celles qui donnent la solution des équations*

$$R + R' = F(u) + F_1(u_1)$$

ou

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

Nous allons étudier quelques cas particuliers.

Premier cas. — Choisissons pour courbes des développables leurs arêtes de rebroussement.

Les fonctions A, B, A_1, B_1 sont liées ici par les relations

$$A' + B - uB' = \text{const.}, \qquad A'_1 + B_1 - uB'_1 = \text{const.}$$

Si l'on égale ces constantes à o, les solutions de l'équation $(2)'$, qui correspondent à cette hypothèse, vérifient l'équation

$$(1 + uu_1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial u_1} - u\frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1\frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi = 0$$

et l'on obtient les surfaces minima. Ces surfaces se confondent avec leurs développées moyennes, et, par suite, peuvent être considérées comme le lieu du milieu du segment rectiligne, dont les extrémités décrivent les arêtes de rebroussement des développables isotropes, c'est-à-dire deux courbes minima. On retrouve ainsi le mode de génération de M. Lie.

Deuxième cas. — Prenons, pour développables isotropes, deux cônes, dont les sommets communs soient à l'origine des coordonnées.

On trouve alors

$$\xi = (1 + uu_1)(C + C_1).$$

L'équation des lignes de courbure prend la forme

$$[2u_1C' + (1 + uu_1)C'']\, du^2 - [2uC'_1 + (1 + uu_1]\, du_1^2 = 0.$$

Faisons

$$C = \alpha u^m + \beta, \qquad C_1 = \alpha u_1^m + \beta_1$$

où α, α_1, β, β_1 sont des constantes.

On a alors

$$\xi = (1 + uu_1)(\alpha u^m + \alpha_1 u_1^m + \gamma), \qquad \gamma = \beta + \beta_1,$$

et l'on intègre immédiatement l'équation des lignes de courbure, qui devient ici

$$\sqrt{\alpha}\, u^{\frac{m-2}{2}}\, du \pm \sqrt{\alpha_1}\, u_1^{\frac{m-2}{2}}\, du_1 = 0.$$

Les paramètres des lignes de courbure sont définis par les relations

$$\rho = \sqrt{\alpha}\, u^{\frac{m}{2}} + \sqrt{\alpha_1}\, u_1^{\frac{m}{2}},$$
$$\rho_1 = \sqrt{\alpha}\, u^{\frac{m}{2}} - \sqrt{\alpha_1}\, u_1^{\frac{m}{2}}.$$

Nous obtenons ainsi un ensemble de surfaces, dont nous connaissons les lignes de courbure.

Pour $m = 2$, les relations précédentes prennent la forme

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha_1})\, c + i(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha_1})\, c' + \rho\, c'' - \rho = 0,$$
$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha_1})\, c + i(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha_1})\, c' + \rho_1 c'' - \rho_1 = 0.$$

Ces équations montrent que, tout le long d'une ligne de courbure, les normales font un angle constant, avec une direction fixe. Nous trouvons ainsi une catégorie de surfaces, dont les deux systèmes de lignes de courbure sont formés de courbes planes. Ces surfaces sont d'ailleurs algébriques.

On a ici

$$R + R' = \frac{2\xi}{1 + uu_1}$$

et pour $C = \alpha u^m + \beta$, $C_1 = \alpha_1 u_1^m + \beta_1$,

$$R + R' = 2(\alpha u^m + \alpha_1 u_1^m + \gamma).$$

Or on a ici

$$u = \frac{c + ic'}{1 - c''}, \qquad u_1 = \frac{c - ic'}{1 - c''}.$$

On peut donc énoncer cette proposition :

Les lignes de la surface, pour lesquelles le segment qui relie un point de cette surface au point correspondant de la développée moyenne (segment que nous appellerons ici, pour abréger, segment moyen) *est constant, admettent, pour repré-*

sentation sphérique, des ellipses ou des hyperboles sphériques homothétiques.

Pour $m = 1$, l'équation qui définit la longueur du segment moyen devient

$$R + R' = 2(\alpha u + \alpha_1 u_1 + \gamma),$$

équation qui peut s'écrire

$$2(\alpha + \alpha_1)c + 2i(\alpha - \alpha_1)c' + (R + R')c'' + 2\gamma - R - R' = 0.$$

On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème. — *Les normales aux surfaces définies par l'équation*

$$\xi = (1 + uu_1)(\alpha u + \alpha_1 u_1 + \gamma)$$

font un angle constant avec une direction fixe, tout le long des lignes, pour lesquelles le segment moyen est également constant.

Troisième cas. — Combinons les deux hypothèses des cas précédents, et supposons que, les développables ayant dégénéré en cônes isotropes, les courbes tracées sur ces développables dégénèrent en leurs arêtes de rebroussement, qui se confondront, ici, en un point unique, l'origine des coordonnées.

Dans ce cas, le milieu du segment rectiligne se confond, avec ses extrémités, en un même point fixe, qui est l'origine. Toutes les droites de la congruence passent donc par un même point. Leur direction, qui est celle de l'intersection des plans tangents aux deux cônes, dépend de deux variables. On a donc une congruence normale à une famille de sphères concentriques.

On a ici

$$\xi = \alpha u u_1 + \beta u + \beta_1 u_1 + \gamma$$

où α, β, β_1, γ sont des constantes.

Les solutions de l'équation $(2)'$, qui correspondent à ce cas, vérifient les deux équations

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = 0.$$

Quatrième cas. — Nous prenons ici une des courbes, quelconque, sur une développable isotrope quelconque, l'autre courbe se réduisant au sommet d'un cône isotrope.

Examinons, d'abord, ce que devient ici le mode de génération indiqué.

Une des extrémités du segment reste fixe, et son point milieu décrit une courbe homothétique à la courbe tracée sur la première développable. Toutes les droites de la congruence passent par la courbe à laquelle s'est réduite la développée moyenne. A chaque position du segment et, par suite, à chaque plan tangent de la première développable correspond l'ensemble des plans tangents au cône isotrope. On voit par là que les droites parallèles aux intersections des plans tangents, qui passent par le milieu du segment, dépendent, encore ici, de deux paramètres et forment, par conséquent, une congruence.

On trouve ici

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0.$$

Si l'on prend le premier cas, on a

$$\xi = A u_1 + B.$$

Si l'on pose

$$v = \frac{B - uB' - A' u u_1}{1 + u u_1},$$

on trouve, pour expression des coordonnées des surfaces,

$$x = \frac{1 - u^2}{2u} v - \frac{uA + B}{2u},$$
$$y = i \frac{1 + u^2}{2u} v + i \frac{uA - B}{2u},$$
$$z = v.$$

Ces surfaces sont des surfaces réglées, dont les génératrices rectilignes rencontrent le cercle de l'infini.

Leur élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{v^2 + (A' + uB' - B)v + (uB' - B)A'}{u^2} du^2 + \frac{uB' - B - A'}{u} du\, dv.$$

Elles ont donc un de leurs paramètres de longueur nulle, commun avec l'un de ceux des surfaces minima et des sphères.

Les génératrices rectilignes de ces surfaces réglées sont toutes situées sur les sphères définies par l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2,$$

où α, β, γ, ρ sont des fonctions de u, assujetties à vérifier les deux relations

$$(u^2-1)\alpha-i(u^2+1)\beta-2u\gamma+u\mathrm{B}-\mathrm{A}=0,$$
$$(u^2+1)\alpha+i(u^2-1)\beta-2u\rho+u\mathrm{B}+\mathrm{A}=0.$$

Pour une même valeur de u, les centres de ces sphères sont tous situés dans un même plan, parallèle au plan tangent à la développable isotrope.

Pour

$$\alpha=-\frac{\mathrm{B}+u\mathrm{A}}{2u},\qquad \beta=-i\,\frac{\mathrm{B}-u\mathrm{A}}{2u},\qquad \gamma=0$$

la sphère correspondante est de rayon nul.

Les génératrices de ces surfaces, qui sont définies par l'équation

$$du=0,$$

constituent les deux systèmes de lignes de courbure, confondus en un seul. Du reste, les droites étant isotropes, la relation d'orthogonalité est vérifiée. Ces droites sont, d'ailleurs, conjuguées à elles-mêmes, puisqu'ici l'indicatrice est un cercle.

Les surfaces que nous venons d'étudier rentrent donc dans la catégorie de celles qui admettent des lignes de courbure sphériques ou, si l'on veut, rectilignes; puisque les droites qui constituent ici les lignes de courbure sont les génératrices rectilignes de la sphère.

Nous pouvons considérer le cas où l'on choisit pour courbe de la développable son arête de rebroussement.

On a alors

$$u\mathrm{B}'-\mathrm{B}-\mathrm{A}'=\text{const.}=\mathrm{K}.$$

On obtient ainsi une famille de surfaces qui, pour $\mathrm{K}=0$, dégénère en une courbe minima.

Cinquième cas. — Supposons que les deux courbes soient les intersections de deux développables isotropes par deux plans isotropes.

Soient

$$y + ix = 0, \qquad y - ix = 0$$

les équations de ces plans.

On trouve alors

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial u_1} = 0, \qquad \xi = B + B_1.$$

L'équation des lignes de courbure est ici

$$\sqrt{B''}\, du \pm \sqrt{B''_1}\, du_1 = 0,$$

équation qui s'intègre immédiatement.

On trouve ici les relations

$$z = \frac{B - uB' + B_1 - u_1 B'_1}{1 + uu_1},$$
$$z_0 = \frac{B - uB' + B_1 - u_1 B'_1}{2},$$
$$R + R' = B - uB' + B_1 - u_1 B'_1;$$

z, z_0 sont des coordonnées relatives, l'une aux surfaces cherchées, l'autre à leur développée moyenne.

De ces relations, on tire la relation nouvelle

$$R + R' = \frac{2z}{1 - c''}.$$

Nous obtenons ainsi une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont nous connaissons l'intégrale générale.

On a encore la relation

$$R + R' = 2z_0;$$

d'où nous déduisons cette proposition :

Les lignes de la surface, pour lesquelles la somme des rayons de courbure est constante, correspondent aux intersections de la développée moyenne, par une famille de plans parallèles.

On vérifie encore que la représentation sphérique de la développée moyenne est la même pour toutes les surfaces considérées.

Soient ρ, ρ_1 les paramètres des lignes de courbure. On trouve pour expression de l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{\sqrt{uu_1}}{(1+uu_1)^2\sqrt{\dfrac{\partial(R+R')}{\partial u}\,\dfrac{\partial(R+R')}{\partial u_1}}}\,[R^2 d\rho^2 + R'^2 d\rho_1^2].$$

Nous terminerons cette étude, sur les équations (2) et (2)', par la démonstration d'un théorème, qui exprime une des principales propriétés des surfaces définies par ces équations.

Théorème. — *Les surfaces, lieux du milieu d'un segment, dont les extrémités décrivent deux courbes quelconques, sont celles que l'on obtient quand on cherche à déterminer les développées moyennes des surfaces définies par l'équation*

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

Nous avons déjà vu que toute développée moyenne de ces surfaces appartient à la catégorie indiquée. Il reste à montrer que toutes les surfaces, qui admettent de telles développées, sont définies par l'équation précédente.

Soient

$$x_0 = M + M_1, \qquad y_0 = N + N_1, \qquad z_0 = P + P_1$$

les expressions des coordonnées des surfaces, lieux du milieu du segment, dont les extrémités décrivent deux courbes quelconques. Si l'on considère ces surfaces comme les développées moyennes de surfaces admettant les coordonnées tangentielles ξ, u, u_1, on aura

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{2}\left[(u+u_1)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - \frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial u_1}\right] = M + M_1,\\
y_0 &= \frac{i}{2}\left[(u_1-u)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - \frac{\partial\xi}{\partial u} + \frac{\partial\xi}{\partial u_1}\right] = N + N_1,\\
z_0 &= \frac{1}{2}\left[(uu_1-1)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - u\frac{\partial\xi}{\partial u} - u_1\frac{\partial\xi}{\partial u_1} + \xi\right] = P + P_1.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre, dont il faut chercher les solutions communes en ξ. Or, sous le bénéfice de certaines relations de condition, entre les fonctions M, N, P, M_1, N_1, P_1 qui, d'ailleurs, ne restreignent pas la généralité des surfaces, on trouve, pour ξ, l'expression

$$\xi = A u_1 + A_1 u + B + B_1,$$

qui est bien la solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$