

BULLETIN DE LA S. M. F.

ISSALY.

Sur une formule d'Enneper et sa corrélative

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 114-124

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__114_1

© Bulletin de la S. M. F., 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE FORMULE D'ENNEPER ET SA CORRÉLATIVE;

Par M. l'abbé ISSALY.

La formule d'Enneper, que nous avons en vue, est celle-ci

$$(1) \quad \tau_0 = \pm \sqrt{-RR'},$$

dans laquelle R et R' désignent les rayons principaux d'une *surface*, en un quelconque de ses points, et τ_0 le rayon de torsion des deux lignes asymptotiques qui s'y croisent.

Dans la formule corrélatve

$$(1') \quad \tau'' = \pm \sqrt{-R_1 R'_1},$$

R_1 et R'_1 désigneront encore des rayons principaux, mais d'espèce différente de celle des premiers, et relatifs à une *pseudo-surface minima*. Quant à τ'' , il sera le rayon de torsion des deux lignes de courbure qui se coupent en chacun des points d'une *telle pseudo-surface*.

I. *Première formule.* — Soit (S) une courbe tracée sur une pseudo-surface \mathcal{F}'' , supposée tout d'abord quelconque. D'après notre précédente Note : *Sur une formule de Laguerre*, etc. (1897), la première courbure de profil ou normale $\frac{1}{\rho''}$, et la première courbure de front ou *torsion géodésique* $\frac{1}{\rho_0}$ de (S), en un point M, que nous prendrons à nouveau pour origine, peuvent

s'écrire

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\sin \Phi}{\rho''} = (p \sin \varphi' + p' \sin \varphi) \sin \varphi - (q \sin \varphi' + q' \sin \varphi) \sin \varphi', \\ \frac{\sin \Phi}{\rho_0} = (p \sin \varphi' + p' \sin \varphi) \cos \varphi + (q \sin \varphi' + q' \sin \varphi) \cos \varphi', \end{cases}$$

l'angle Φ des lignes coordonnées (s) et (s') étant assujetti à la condition

$$(3) \quad \Phi = \varphi + \varphi' = \text{const.}$$

On a d'ailleurs subsidiairement

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho''} = \frac{\cos \varpi}{\rho_\sigma} = -\frac{\cos \psi}{\rho_\varepsilon} = -\frac{1}{\tau_\nu} + \frac{d\chi}{dS}, \\ \frac{1}{\rho_0} = \frac{\cos \gamma}{\rho_\nu} = \frac{\sin \psi}{\rho_\varepsilon} = -\frac{1}{\tau_\sigma} + \frac{d\varpi}{dS}. \end{cases}$$

Ceci rappelé, cherchons la relation générale qui doit nécessairement exister entre $\frac{1}{\rho''}$ et $\frac{1}{\rho_0}$.

A cet effet, si l'on considère, pour un instant, le système (2) comme un couple d'équations du premier degré, dont les inconnues seraient les binômes mis entre parenthèses, on en tirera

$$(2') \quad \begin{cases} p \sin \varphi' + p' \sin \varphi = \frac{\sin \varphi'}{\rho_0} + \frac{\cos \varphi'}{\rho''}, \\ q \sin \varphi' + q' \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\rho_0} - \frac{\cos \varphi}{\rho''}, \end{cases}$$

avec cette particularité que, à cause de (3), on a aussi

$$(5) \quad \begin{cases} \cos \varphi \sin \Phi = \sin \varphi' + \sin \varphi \cos \Phi, \\ \cos \varphi' \sin \Phi = \sin \varphi + \sin \varphi' \cos \Phi. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans (2), on obtient le système homogène

$$(2'') \quad \begin{cases} \left(p' \sin \Phi - \frac{1}{\rho''} \right) \sin \varphi + \left[\left(p - \frac{1}{\rho_0} \right) \sin \Phi - \frac{\cos \Phi}{\rho''} \right] \sin \varphi' = 0, \\ \left[\left(q' - \frac{1}{\rho_0} \right) \sin \Phi + \frac{\cos \Phi}{\rho''} \right] \sin \varphi + \left(q \sin \Phi + \frac{1}{\rho''} \right) \sin \varphi' = 0. \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à évaluer à zéro son déterminant pour en déduire

la relation demandée, savoir

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{\rho''^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \right) + \left(\frac{q + p \cos \Phi}{\sin \Phi} - \frac{p' + q' \cos \Phi}{\sin \Phi} \right) \frac{1}{\rho''} \\ - (p + q') \frac{1}{\rho_0} + (pq' - qp') = 0. \end{array} \right.$$

Devant ce résultat, nous sommes naturellement conduit à poser

$$(7) \quad \begin{cases} p + q \cos \Phi = p_1 \sin \Phi, \\ q + p \cos \Phi = q_1 \sin \Phi, \end{cases}$$

d'où

$$(7') \quad \begin{cases} p_1 - q_1 \cos \Phi = p \sin \Phi, \\ q_1 - p_1 \cos \Phi = q \sin \Phi, \end{cases}$$

avec deux autres systèmes analogues en p', q', p'_1, q'_1 . Or ceci, disons-le en passant, équivaut, pour toutes ces composantes, à un changement de coordonnées dans lequel on substituerait à l'angle XMY ou Φ actuel, son supplément X₁M₁Y₁ ou $\pi - \Phi$.

Quoi qu'il en soit, on tire de là, comme première conséquence, l'identité

$$(8) \quad pq' - qp' = p_1 q'_1 - q_1 p'_1 = K'',$$

puis, finalement, cette forme plus simple de la relation (6) :

$$(6') \quad \left(\frac{1}{\rho''^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \right) + (q_1 - p'_1) \frac{1}{\rho''} - (p + q') \frac{1}{\rho_0} + K'' = 0,$$

forme qu'on pourrait réduire encore, mais sans avantage réel, en observant que la somme des deux premiers termes est, d'après (4), égale à $\frac{1}{\rho_\epsilon^2}$, c'est-à-dire au carré de la *dévi*ation *verticale* de la ligne (S).

Parmi toutes les particularités que la relation (6') présente, nous en choisirons deux, savoir : celles où l'on a

$$\frac{1}{\rho''} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{\rho_0} = 0.$$

Il vient alors *isolément*

$$(9) \quad \frac{1}{\rho_0^2} - (p + q') \frac{1}{\rho_0} + K'' = 0,$$

$$(10) \quad \frac{1}{\rho''^2} + (q_1 - p'_1) \frac{1}{\rho''} + K'' = 0.$$

Dans la première de ces équations, on reconnaît les courbures de front des lignes asymptotiques définies précisément par la condition $\frac{1}{\rho^2} = 0$, et, dans la seconde, les courbures de profil des lignes de courbure définies par la condition $\frac{1}{\rho_0} = 0$. Mais on peut y voir aussi, d'une part, dans (10), les foyers *optiques* ou de première espèce correspondant au cône C_1 de Malus relatif à la normale MZ , et, d'autre part, dans (9), les foyers *anoptiques* ou de deuxième espèce correspondant à l'orthogonal C_2 de ce même cône (1).

Ayant à revenir bientôt sur ces deux surfaces, occupons-nous, pour le moment, de l'équation (9) ci-dessus.

Lorsqu'on y fait $p + q' = 0$, condition caractéristique des surfaces (et dont la forme, ajoutons-le, ne change pas, que les coordonnées soient rectangulaires ou obliques), cette équation (9) se réduit à

$$(9') \quad \frac{1}{\rho_0^2} + K'' = 0.$$

Par la même hypothèse, l'indicatrice de la pseudo-surface \tilde{F}'' qui, d'après notre premier Mémoire (1888, n° 19), revient, avec nos notations présentes, à

$$(11) \quad qX^2 - (p - q')XY - p'Y^2 = -\frac{1}{\sin \Phi},$$

se transforme en l'indicatrice de surface

$$(11') \quad qX^2 - 2pXY - p'Y^2 = -\frac{1}{\sin \Phi}.$$

Pour $p = q' = 0$, cette *conique* se trouve rapportée à deux diamètres conjugués, et comme ces conditions impliquent $\Phi = \frac{\pi}{2}$, ces diamètres se confondent avec les axes de figure de la courbe.

Soient R et R' les rayons principaux, en M , de la surface F'' , limite de \tilde{F}'' . Le mode de construction bien connu de l'indicatrice

(1) Voir, pour ces deux cônes remarquables et la double série de ceux dont ils constituent les limites : *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. V (3^e série), et t. I (5^e série).

exige que l'on fasse

$$\frac{1}{R} = -q \quad \text{et} \quad \frac{1}{R'} = p'.$$

Cela étant, remontons à la seconde des équations (4). Si, après y avoir remplacé (convenablement) τ_σ par τ_0 et supprimé le terme $\frac{d\sigma}{dS}$, qui est invariablement nul, le long de toute ligne asymptotique, nous comparons cette seconde équation (4) à (9'), il viendra

$$\frac{1}{\tau_0^2} = \frac{1}{\rho_0^2} = -K' = qp' = -\frac{1}{RR'};$$

d'où l'on déduit

$$\tau_0 = \pm \sqrt{-RR'}.$$

C'est la formule d'Enneper. Les calculs qui ont servi à l'établir prouvent qu'elle concerne les surfaces, *seulement*.

Comme complément de la question, proposons-nous de chercher l'expression *correspondante* de la première courbure géodésique $\frac{1}{\rho'}$, ou mieux, $\frac{1}{\rho'_a}$, de la ligne (S), devenue ligne *asymptotique*.

A cet effet, les coordonnées étant présentement rectangulaires, par hypothèse, nous partirons des deux premières équations du système suivant, *exclusivement propre aux surfaces*, savoir

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial s'} - \frac{\partial p'}{\partial s} = rp + r'p' + (qr' - rq'), \\ \frac{\partial q}{\partial s'} - \frac{\partial q'}{\partial s} = rq + r'q' + (rp' - pr'), \\ \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\partial r'}{\partial s} = r^2 + r'^2 + (pq' - qp'). \end{cases}$$

En y faisant, d'après la question, $p = q' = 0$ avec $q = -\frac{1}{R}$, $p' = \frac{1}{R'}$, on en tire

$$(b) \quad r = \frac{R'}{R(R - R')} \frac{\partial R}{\partial s'}, \quad r' = \frac{R}{R'(R - R')} \frac{\partial R'}{\partial s}.$$

D'autre part, on sait que

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\varphi}{dS} + r \cos \varphi + r' \sin \varphi,$$

ou, plus explicitement,

$$(c) \quad \frac{1}{\rho'} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + r \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s'} + r' \right) \sin \varphi.$$

Tout revient donc à éliminer φ . Or, d'après l'équation réduite des lignes asymptotiques, on a

$$\frac{\cos^2 \varphi}{R} + \frac{\sin^2 \varphi}{R'} = 0,$$

d'où l'on conclut d'abord

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{-R'}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{R - R'}},$$

puis, par la différentiation de $\tan \varphi$ et de $\cot \varphi$,

$$(d) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{R'}{R - R'} \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\frac{R}{-R'}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s'} = \frac{R}{R - R'} \frac{\partial}{\partial s'} \sqrt{\frac{-R'}{R}}. \end{cases}$$

Substituant dans (c) et usant d'un artifice de calcul que telle propriété particulière des quadriques suffit à suggérer, il vient, pour l'inconnue cherchée,

$$\frac{(R - R')^{\frac{3}{2}}}{\rho'_a} = R'^2 \sqrt{R} \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\frac{R}{-R'^3}} + R^2 \sqrt{-R'} \frac{\partial}{\partial s'} \sqrt{\frac{-R'}{R^3}}.$$

A cette forme, déjà très acceptable, on peut substituer celle, plus élégante, obtenue par O. Bonnet, à savoir

$$\frac{1}{\rho'_a} = \frac{4(-RR')^{\frac{7}{8}}}{(R - R')^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R}{-R'^3} \right)^{\frac{1}{8}} + \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{-R'}{R^3} \right)^{\frac{1}{8}} \right].$$

Cette dernière se déduit, en effet, sans peine de la précédente, en y introduisant les paramètres *auxiliaires*

$$\sqrt{\frac{R}{-R'^3}} = \theta^{\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{\frac{-R'}{R^3}} = \theta^{\frac{1}{4}}.$$

II. *Formule corrélatrice*. — Avant de procéder à sa recherche,

quelques considérations préliminaires nous paraissent indispensables.

Et d'abord, écrivons l'équation du cône précité de Malus, et celle de son orthogonal, cônes relatifs, tous deux, à MZ. On a

$$(c_1) \quad (p_1 X + p'_1 Y + p''_1 Z)X + (q_1 X + q'_1 Y + q''_1 Z)Y = 0,$$

$$(c_2) \quad (q X + q' Y + q'' Z)X - (p X + p' Y + p'' Z)Y = 0;$$

d'où l'on conclut, pour leurs *traces horizontales*,

$$(12) \quad p_1 X^2 + (q_1 + p'_1)XY + q'_1 Y^2 = 0,$$

$$(13) \quad q X^2 - (p - q')XY - p' Y^2 = 0.$$

Or, ces traces doivent, *a priori*, coïncider respectivement avec les tangentes, à l'origine, soit des lignes de courbure S_1 ou $\frac{1}{\rho_0} = 0$, soit des lignes asymptotiques S_2 ou $\frac{1}{\rho''} = 0$ de la pseudo-surface \mathcal{F}'' .

On vérifie sans difficulté le fait, en observant que X, Y sont proportionnels à ds, ds' et, par conséquent, à $\sin \varphi', \sin \varphi$. Comme, au surplus, on a

$$\cos \varphi \, dS = ds + ds' \cos \Phi,$$

$$\cos \varphi' \, dS = ds' + ds \cos \Phi,$$

il devient facile de déduire *directement* des systèmes (4) et (7), ces formes respectives de S_1 et de S_2 , manifestement identiques à (12) et à (13),

$$(S_1) \quad p_1 ds^2 + (q_1 + p'_1) ds \, ds' + q'_1 ds'^2 = 0,$$

$$(S_2) \quad q ds^2 - (p - q') ds \, ds' - p' ds'^2 = 0.$$

Plaçons ici deux remarques importantes sur ces lignes :

1° Pour que les lignes de courbure S_1 soient rectangulaires, et, conséquemment, pour que \mathcal{F}'' se change en F'' , il faut et il suffit que l'on ait

$$(14) \quad p_1 + q'_1 - (q_1 + p'_1) \cos \Phi = 0,$$

ou bien (7')

$$p + q' = 0,$$

condition *superficielle* connue.

2° Pour que les lignes asymptotiques S_2 soient rectangulaires, il faut et il suffit que l'on ait

$$(15) \quad q - p' + (p - q') \cos \Phi = 0,$$

ou bien (7)

$$q_1 - p'_1 = 0,$$

condition caractéristique des *pseudo-surfaces minima*, ainsi que nous l'avons surabondamment démontré dans le *Recueil de Mémoires* de la Société déjà citée (t. V, 5^e série).

De là résulte la propriété nouvelle et très générale qui suit :

THÉORÈME. — *Les surfaces sont, vis-à-vis de leurs lignes de courbure, ce que les pseudo-surfaces minima sont vis-à-vis de leurs lignes asymptotiques.*

Ces principes posés, rapprochons des équations (12) et (13) les suivantes qui, en tenant compte des conditions obtenues plus haut, n'en diffèrent que par les termes indépendants

$$(16) \quad p_1 X^2 + 2q_1 XY + q'_1 Y^2 = \frac{1}{\sin \Phi},$$

$$(17) \quad q X^2 - 2p XY - p' Y^2 = -\frac{1}{\sin \Phi}.$$

Comme la seconde des coniques que ces équations représentent n'est autre que l'indicatrice (11') de \mathcal{F}'' *particularisée*, sinon *dégénérée* en surface, on est contraint d'admettre que la première de ces coniques représente, par rapport à \mathcal{F}'' *particularisée* en pseudo-surface minima, une indicatrice, de nouvelle espèce sans doute, mais *corrélative* de la première, en sorte que si l'on convient d'appeler *lignes de première ou de deuxième espèce* les lignes S_1 ou S_2 , on devra, par analogie, étendre ces mêmes dénominations aux indicatrices correspondantes (16) et (17).

Sans insister davantage sur ce point, supposons que l'on ait à la fois

$$q_1 = p'_1 = 0.$$

La nouvelle indicatrice (16) se trouvera rapportée à deux de ses diamètres conjugués, lesquels deviendront les axes eux-mêmes,

pour $\Phi = \frac{\pi}{2}$. On est ainsi amené à poser

$$\frac{1}{R_1} = p_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{R'_1} = q'_1,$$

formules dans lesquelles on pourrait, à la rigueur, supprimer désormais les indices; mais il est préférable de les y maintenir, pour que la distinction des deux cas qui nous occupent demeure plus tranchée.

Ceci convenu, faisons

$$(15) \quad q_1 - p'_1 = 0,$$

ou plutôt, actuellement,

$$q_1 = p'_1 = 0,$$

dans l'équation (10). Elle se réduira à

$$\frac{1}{\rho'^2} + K'' = 0.$$

Que si, d'autre part, utilisant à son tour la première des équations (4), on y remplace (pour la symétrie) τ_v par τ'' , puis qu'on y supprime le terme $\frac{d\chi}{dS}$, qu'on peut démontrer (premier Mémoire, n° 14) être toujours nul le long d'une ligne de courbure, il viendra

$$\frac{1}{\tau'^2} = \frac{1}{\rho'^2} = -K'' = -p_1 q'_1 = -\frac{1}{R_1 R'_1},$$

d'où l'on tire

$$\tau'' = \pm \sqrt{-R_1 R'_1}.$$

C'est la formule corrélatrice annoncée. Elle a trait, on le voit, aux pseudo-surfaces minima *seulement*.

L'analogie nous conduit à nous demander quelle peut être l'expression de la première courbure géodésique $\frac{1}{\rho'}$, ou mieux $\frac{1}{\rho'_c}$, de la ligne (S) devenue *ligne de courbure*.

Pour le savoir, force nous est de faire usage des deux premières équations du système suivant :

$$(a') \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial s'} - \frac{\partial p'}{\partial s} = q r' - r q', \\ \frac{\partial q}{\partial s'} - \frac{\partial q'}{\partial s} = r p' - p r', \\ \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\partial r'}{\partial s} = p q' - q p', \end{cases}$$

exclusivement propre aux pseudo-surfaces, en général, vu qu'il *exige*, par son origine même [ainsi que nous le prouverons ultérieurement à nouveau, bien que nous l'ayons déjà fait en substance (1)], que les arcs ds, ds' y soient considérés comme indépendants. Cela dit, si l'on fait intervenir les conditions

$$q_1 = p'_1 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, répétons-le,

$$q = p' = 0,$$

les valeurs de r et de r' correspondantes seront

$$(b') \quad r = \frac{R'_1}{R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial s'}, \quad r' = - \frac{R_1}{R_1'^2} \frac{\partial R'_1}{\partial s}.$$

Et comme, d'autre part, l'équation *réduite* des lignes de courbure *pseudo-superficielles*

$$\frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R'_1} = 0$$

nous donne d'abord

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{-R'_1}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R_1 - R'_1}}$$

et, par suite,

$$(d') \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{R'_1}{R_1 - R'_1} \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\frac{R_1}{-R'_1}}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s'} = \frac{R_1}{R_1 - R'_1} \frac{\partial}{\partial s'} \sqrt{\frac{-R'_1}{R_1}}; \end{cases}$$

ces six valeurs, mises dans l'expression suivante

$$(c') \quad \frac{1}{\rho_c} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + r \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s'} + r' \right) \sin \varphi,$$

résoudront complètement le problème.

Il est à remarquer que les simplifications que le cas des surfaces a amenées ne se reproduisent pas ici.

Nous ne saurions, avant de clore cet article, passer sous silence le cas exceptionnellement digne d'intérêt où, dans la relation (6'),

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques* (p. 204; 1890).

on a, à la fois,

$$(18) \quad p + q' = 0, \quad q_1 - p'_1 = 0,$$

système de conditions qui, de par (14) et (15), exprime que les lignes S_1 et S_2 sont rectangulaires *simultanément*, et qui, du même coup, rend *équilatères* les hyperboles indicatrices (16) et (17).

A ces propriétés on reconnaît celles qui caractérisent les *surfaces minima*. L'équation (6') qui leur correspond se réduit alors à

$$\left(\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \right) + K'' = \frac{1}{\rho_0^2} + K'' = 0.$$

Quant à la valeur (négative) que prend, dans ce cas, K'' , nous ferons remarquer que les conditions (18) pouvant s'écrire

$$(18') \quad \begin{cases} p' = q + 2p \cos \Phi, \\ q' = -p, \end{cases}$$

ou bien

$$(18'') \quad \begin{cases} p'_1 = q_1, \\ q'_1 = -p_1 + 2q_1 \cos \Phi; \end{cases}$$

on a, en conséquence,

$$-K'' = p^2 + q^2 + 2pq \cos \Phi = p_1^2 + q_1^2 - 2p_1 q_1 \cos \Phi = \omega_2^2.$$

La transition à la formule correspondante d'Enneper et à sa corrélatrice devient maintenant chose aisée, et l'on trouve

$$\begin{aligned} \tau_0 &= R = -R', \\ \tau'' &= R_1 = -R'_1, \end{aligned}$$

formules dont le premier groupe *seul* pouvait, dans l'état actuel de la Science, être prévu.
