BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 129-134
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__129_1>

SUR L'EXISTENCE DES FONCTIONS INTÉGRALES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. E. Goursat.

Dans la démonstration classique, de M[me] de Kowalewski, de l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles, on traite d'abord le cas des équations linéaires et homogènes d'une forme particulière, puis celui des équations linéaires quelconques, et enfin le cas général. Il m'a semblé qu'on pouvait arriver plus vite au but, grâce à l'emploi d'un artifice dont je m'étais déjà servi pour l'étude des propriétés des caractéristiques (¹).

Pour bien faire saisir la suite des idées, j'exposerai d'abord la marche de la démonstration en détail pour une équation du second ordre à deux variables indépendantes. Dans ce cas particulier, le théorème de Cauchy s'énonce ainsi :

Soit

$$r = F(x, y, z, p, q, s, t) \tag{1}$$

une équation du second ordre où le second membre est holomorphe dans le voisinage des valeurs $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0, t_0$; *soient, d'autre part,* $\varphi_0(y)$ *et* $\varphi_1(y)$ *deux fonctions de* y, *holomorphes au voisinage de* y_0, *et telles que l'on ait*

$$\varphi_0(y_0) = z_0, \quad \varphi'_0(y_0) = q_0, \quad \varphi''(y_0) = t_0, \quad \varphi_1(y_0) = p_0, \quad \varphi'_1(y_0) = s_0.$$

Il existe une fonction z, *satisfaisant à l'équation* (1), *holomorphe au voisinage de* x_0, y_0 *et telle que, pour* $x = x_0$, z *se réduise à* $\varphi_0(y)$ *et* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *à* $\varphi_1(y)$.

On peut d'abord, par une suite de transformations évidentes, remplacer les conditions initiales par des conditions plus simples. On peut supposer $x_0 = y_0 = 0$, car cela revient à remplacer x par $x_0 + x$ et y par $y_0 + y$; si l'on pose ensuite

$$z = \varphi_0(y) + x\varphi_1(y) + u,$$

u désignant une nouvelle fonction inconnue, on voit que u et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ doivent être identiquement nuls pour $x = 0$, quel que soit y. Les transformations précédentes étant supposées effectuées, la démonstration du théorème général est ramenée à celui-ci :

(¹) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 184 et suiv.; t. II, p. 305.

L'équation

$$(2) \qquad r = a + bx + cy + dz + ep + fq + gs + ht + \dots$$

admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point $x = y = 0$, s'annulant, ainsi que sa dérivée première $\frac{\partial z}{\partial x}$, pour $x = 0$.

Comme les coefficients du développement de cette intégrale se déduisent des coefficients a, b, c, d, ..., par les seules opérations d'addition et de multiplication, il est permis, pour établir la convergence, d'employer la méthode des fonctions majorantes. Il est encore permis de supposer $a = 0$, car il suffit de remplacer z par $z + a\frac{x^2}{2}$ pour faire disparaître ce coefficient.

Cela posé, le second membre de l'équation (2) admet pour fonction majorante une expression de la forme

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x+y+z+p+q}{R}\right)\left(1 - \frac{s+t}{\rho}\right)} - M,$$

M, ρ, R étant des nombres positifs déterminés; comme on augmente les coefficients en remplaçant x par $\frac{x}{\alpha}$, α étant un nombre positif moindre que l'unité, la fonction

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\alpha}+y+z+p+q}{R}\right)\left(1 - \frac{s+t}{\rho}\right)} - M$$

est *a fortiori* majorante, et il nous suffira de montrer que l'équation auxiliaire

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{M}{\left(\frac{1 - \frac{x}{\alpha}+y+z+p+q}{R}\right)\left(1 - \frac{s+t}{\rho}\right)} - M$$

admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point $x = y = 0$, nulle, ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$, pour $x = 0$.

La convergence de ce nouveau développement sera établie, si l'on montre que l'équation (3) admet une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, dont tous les coefficients sont réels et positifs. Car les coefficients de ce troisième développement seront nécessairement supérieurs aux coefficients correspondants du second, puisque les coefficients des termes en y^n et en xy^n sont supposés positifs, et que les autres se déduisent de ceux-là par voie d'addition et de multiplication. Finalement tout se réduit à établir que l'équation auxiliaire (3) admet pour intégrale une série entière convergente dont tous les coefficients sont réels et positifs. Cherchons, pour cela, à satisfaire à cette équation en prenant pour z une fonction de $x + \alpha y = u$; on est conduit à l'équation différentielle du second ordre

$$\left[1 - \frac{M}{\rho}(\alpha + \alpha^2)\right]\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\alpha + \alpha^2}{\rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)^2 = \frac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{u}{\alpha} + z + \dfrac{\partial z}{\partial u}(1 + \alpha)}{R}} - M.$$

Le nombre positif α étant assujetti à la seule condition d'être inférieur à l'unité, choisissons-le assez petit pour que l'on ait $M(\alpha + \alpha^2) < \rho$; l'équation précédente peut alors s'écrire, sous forme abrégée,

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - B\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)^2 = \varphi\left(u, z, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \tag{4}$$

A et B étant deux nombres positifs et $\varphi\left(u, z, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ une série entière ordonnée suivant les puissances croissantes de z, u, $\frac{\partial z}{\partial u}$, ayant tous ses coefficients réels et positifs, et n'ayant pas de terme indépendant de z, u, $\frac{\partial z}{\partial u}$. Il existe une intégrale de cette équation, holomorphe dans le voisinage de $u = 0$, et telle que l'on ait, pour $u = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial z}{\partial u} = u = 0$. Tous les autres coefficients du développement de cette intégrale sont des nombres réels et positifs. On a, par exemple,

$$A\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} - 2B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2};$$

la valeur initiale de $\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}$ est donc égale à

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_0,$$

c'est-à-dire à un nombre réel et positif. On a ensuite

$$A\frac{\partial^4 z}{\partial u^4} - 2B\left(\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}\right)^2 - 2B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial^4 z}{\partial u^4} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \ldots,$$

et, par conséquent, $\left(\frac{\partial^4 z}{\partial u^4}\right)_0$ est encore positif; en continuant ainsi, on voit que tous les coefficients successifs de ce développement sont positifs. L'équation auxiliaire (3) admet donc une intégrale représentée par une série convergente de la forme

$$z = A_3(x+\alpha y)^3 + A_4(x+\alpha y)^4 + \ldots + A_n(x+\alpha y)^n + \ldots,$$

les coefficients A_3, A_4, ..., A_n étant positifs, ainsi que α; il est clair que le coefficient d'un terme quelconque $x^m y^{m'}$ est positif, et de là résulte l'exactitude du théorème énoncé.

Passons maintenant au cas général de q équations simultanées d'ordre n, entre q fonctions inconnues z_1, z_2, ..., z_q et $r+1$ variables indépendantes x, x_1, x_2, ..., x_r. Ces équations étant mises sous la forme

$$(5) \qquad \frac{\partial^n z_i}{\partial x^n} = F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

où les seconds membres F_i sont des fonctions des $r+1$ variables indépendantes x, x_1, x_2, ..., x_r, des q fonctions inconnues z_1, z_2, ..., z_q et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, sauf les dérivées $\frac{\partial^n z_i}{\partial x^n}$, le théorème général consiste, comme on sait, en ceci : il existe, sous certaines conditions de continuité inutiles à rappeler, un système de q intégrales z_1, z_2, ..., z_q, se réduisant, pour $x = x_0$, ainsi que leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial z_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} z_i}{\partial x^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

à des fonctions données à l'avance de x_1, x_2, ..., x_r.

Par une suite de transformations tout à fait pareilles à celles qui nous ont servi pour le cas particulier déjà traité, la démonstration de cette proposition générale se trouve ramenée à la démonstration du théorème suivant : *Pour une valeur convenablement choisie de la constante réelle* $\alpha < 1$, *le système auxiliaire*

$$(6)\qquad \frac{\partial^n Z_1}{\partial x^n} = \frac{\partial^n Z_2}{\partial x^n} = \ldots = \frac{\partial^n Z_q}{\partial x^n} = \frac{M}{\left(1-\frac{U}{R}\right)\left(1-\frac{V}{\rho}\right)} - M,$$

où V *est égale à la somme des dérivées partielles d'ordre* n *des fonctions inconnues, sauf les dérivées* $\frac{\partial^n Z_i}{\partial x^n}$, *et où l'on a*

$$U = \frac{x}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_r + Z_1 + \ldots + Z_q + \frac{\partial Z_n}{\partial x} + \ldots,$$

les termes non écrits comprenant toutes les dérivées d'ordre inférieur à n, *admet un système d'intégrales holomorphes dans le voisinage du point* $x = x_1 = \ldots = x_r = 0$, *tel que tous les coefficients des développements en série de ces intégrales soient des nombres réels et positifs.*

Pour montrer qu'un pareil système d'intégrales existe, il suffit de chercher à vérifier ce système auxiliaire en posant

$$Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_q = U(u)$$

où

$$u = x + \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_r);$$

on est conduit ainsi, pour déterminer la fonction U, à une seule équation de la forme

$$(7)\qquad A\frac{\partial^n U}{\partial u^n} - B\left(\frac{\partial^n U}{\partial u^n}\right)^2 = \Phi\left(u, U, \frac{\partial U}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} U}{\partial u^{n-1}}\right),$$

où A et B sont deux coefficients positifs pourvu que α soit suffisamment petit, et où le second membre est la somme d'une série entière dont tous les coefficients sont réels et positifs, et ne présentant pas de terme constant. On démontre, comme plus haut, que l'intégrale de cette équation qui est nulle, ainsi que ses n premières dérivées, pour $u = 0$, est représentée par un développement en série dont tous les coefficients sont positifs.