E. BOREL

Sur les singularités des séries de Taylor

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 238-248
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__238_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES SINGULARITÉS DES SÉRIES DE TAYLOR;

Par M. Émile Borel.

M. Hadamard vient de publier dans les *Acta mathematica* (t. 22) la démonstration d'un théorème qu'il avait fait connaître en 1897, dans les *Comptes rendus*. Cet énoncé m'avait très vivement intéressé dès son apparition et, comme je faisais à cette époque un cours sur la Théorie des fonctions, j'en avais cherché une démonstration pour la donner à mes élèves. Je viens de reconnaître qu'*elle repose sur le même principe que celle de M. Hadamard;* mais il ne me semble pas inutile de la publier, car elle est simple et conduit à plusieurs conséquences nouvelles qui augmentent encore l'intérêt et la portée du beau théorème de M. Hadamard.

Ce théorème est le suivant; considérons les trois séries

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,\\ \psi(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,\\ f(z) &= a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \ldots,\end{aligned}$$

dont les deux premières ont un rayon de convergence différent de zéro et de l'infini (le rayon de convergence de la troisième est alors différent de zéro, mais peut être infini). Ces séries définissent alors des fonctions analytiques *que nous considérons dans tout leur domaine d'existence*. Désignons par α un point singulier quelconque de $\varphi(z)$, par β un point singulier quelconque de $\psi(z)$; *la fonction $f(z)$ ne peut avoir d'autres points singuliers que les points $\alpha\beta$*. Tel est le résultat obtenu par M. Hadamard.

Je me propose de le compléter en montrant que *la nature du point singulier $\alpha\beta$ ne dépend que de la nature des points singuliers α et β*; on peut la déterminer dans des cas assez étendus et en conclure, en particulier, ce fait, sans doute général, que, dans les cas étudiés, *le point $\alpha\beta$ est effectivement un point singulier de la fonction $f(z)$*. Un cas d'exception possible est celui où l'on a

$$\alpha\beta = \alpha'\beta',$$

α et α' étant deux points singuliers de $\varphi(z)$; β, β' deux points singuliers de $\psi(z)$; alors on obtient pour $f(z)$ deux singularités qui se superposent; *il peut arriver qu'elles se détruisent.*

Enfin, je montre que si les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont respectivement uniformes au voisinage des points α et β, *la fonction* $f(z)$ est uniforme au *voisinage du point* $\alpha\beta$. En particulier, *si les développements en série*

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$
$$\psi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

représentent des fonctions uniformes dans tout le plan ([1]), *il en est de même du développement*

$$f(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \ldots.$$

I.

Nous partirons de l'expression ([2])

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \psi\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(zx)\frac{dx}{x}.$$

Dans cette expression, R et R' étant les rayons de convergence de $\varphi(z)$ et de $\psi(z)$, on suppose le module de z inférieur à RR' et l'on désigne par C un cercle tracé dans le plan de la variable complexe x, ayant pour centre le point $x = 0$ et pour rayon un nombre quelconque compris entre $\frac{1}{R'}$ et $\frac{R}{|z|}$.

Cette expression analytique de $f(z)$ reste évidemment valable *si l'on déforme le contour* C *sans lui faire traverser de point singulier de la fonction à intégrer*. D'ailleurs ce contour étant fixé d'une manière quelconque, on obtient le prolongement analytique de $f(z)$ *en déplaçant z dans son plan, à condition que les points singuliers de la fonction à intégrer ne traversent pas le contour d'intégration.*

([1]) *Voir* la fin de cette Note pour les exceptions possibles dans le cas de lignes singulières.

([2]) Cf. *Intermédiaire des mathématiciens,* t. I, p. 139, 171, 196, 197, Notes de MM. Sadier, Fehr, Peano, Borel.

Or, on pourra toujours réaliser cette double condition, tant que z ne sera pas tel qu'un point singulier de la fonction $\varphi(z)$ coïncide [1] avec un point singulier de la fonction $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$. Si l'on désigne par α un point singulier quelconque de $\varphi(z)$ et par β un point singulier quelconque $f(z)$, les équations

$$zx = \alpha, \qquad \frac{1}{x} = \beta$$

donnent

$$z = \alpha\beta.$$

Donc le prolongement analytique de $f(z)$ sera possible, quels que soient les déplacements de z dans son plan [2], à condition que les points $\alpha\beta$ soient toujours évités [3]. Ces points sont donc les seuls points singuliers *possibles* de $f(z)$.

II.

Si nous considérons la fonction $\psi(z)$ comme fixée, et la fonc-

---

[1] En effet, l'ensemble formé de points singuliers d'une fonction étant parfait (contenant son dérivé), s'il n'y a pas coïncidence, il y a *une distance finie* entre ces deux systèmes de points singuliers.

[2] Il y a cependant un cas d'exception, dans le cas où les fonctions ne sont pas uniformes; il est relatif au point $z = 0$; si l'on trace le contour d'intégration sur la sphère, pour plus de clarté, on voit que les points singuliers $\frac{\alpha}{z}$ traversent alors certaines branches de ce contour. Aussi peut-on dire que, dans le cas où $f(z)$ n'est pas uniforme, le point $z = 0$ est, *en général,* un point singulier pour le prolongement analytique de cette fonction. C'est en étudiant un exemple que je devais à une communication verbale de M. E. Lindelöf, que j'ai été conduit à reconnaître ce cas d'exception, d'ailleurs unique, au théorème de M. Hadamard. Je dois remercier M. Lindelöf, qui m'a obligeamment autorisé à utiliser sa communication.

[3] On peut *matérialiser* comme il suit le raisonnement précédent: concevons le contour fermé C comme un fil flexible et extensible, les points singuliers de $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ comme des épingles piquées dans le plan, les points singuliers de $\varphi(zx)$ comme des épingles qui se déplacent lorsque z varie. Il faut et il suffit que le fil sépare toujours les deux systèmes d'épingles. Or cela sera toujours possible par une déformation convenable, si, dans leur déplacement, les secondes épingles ne viennent jamais *heurter* les premières (on pourra même supposer le fil à une distance finie de chaque épingle, ce qui suffit pour que l'intégrale soit une fonction régulière de z); le fil peut acquérir une forme très compliquée, mais cela n'a aucun inconvénient.

tion $\varphi(z)$ comme variable, la fonction $f(z)$ se déduit de $\varphi(z)$ au moyen d'une opération fonctionnelle déterminée. Cette opération est distributive (¹), c'est-à-dire que si l'on a

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z),$$

on peut poser

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

les fonctions f_1 et f_2 se déduisant de φ_1 et de φ_2 par le même procédé qui, appliqué à f, donne φ. Si nous posons

$$f = \mathrm{H}(\varphi, \psi),$$

on peut écrire

$$\mathrm{H}(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = \mathrm{H}(\varphi_1, \psi) + \mathrm{H}(\varphi_2, \psi). \tag{1}$$

Soit $z = \alpha$ un point singulier de $\varphi(z)$; supposons que la fonction $\varphi_2(z)$ soit *régulière* en α; la fonction $\varphi_1(z)$ admet alors en α *la même singularité* que $\varphi(z)$.

Soit β un point singulier quelconque de $\psi(z)$; la fonction $\varphi_2(z)$ étant régulière en α, *la fonction* $\mathrm{H}(\varphi_2, \psi)$ *est régulière au point* $\alpha\beta$ (*voir*, plus loin, ce qui concerne le cas d'exception possible dont nous avons déjà parlé). Donc, il résulte de l'égalité (1) que *les fonctions* $\mathrm{H}(\varphi, \psi)$ *et* $\mathrm{H}(\varphi_1, \psi)$ *ont en* $\alpha\beta$ *la même singularité*. Il est clair que, si l'on désigne par ψ_1 une fonction ayant en β la même singularité que ψ (c'est-à-dire telle que $\psi - \psi_1$ soit régulière en β), la fonction $\mathrm{H}(\varphi_1, \psi_1)$ aura en $\alpha\beta$ la même singularité que $\mathrm{H}(\varphi_1, \psi)$, c'est-à-dire la même que $\mathrm{H}(\varphi, \psi)$.

Donc *la nature de la singularité* $\alpha\beta$ *est déterminée par la nature des singularités* α *et* β.

Pour donner immédiatement une application, posons

$$\varphi(z) = \frac{1}{(\alpha - z)^p} = \frac{1}{\alpha^p} + \frac{z}{\alpha^{p+1}} + \ldots + \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots(p-1)} \frac{z^m}{\alpha^{m+p}} + \ldots,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{(\beta - z)^q} = \frac{1}{\beta^q} + \frac{z}{\beta^{q+1}} + \ldots + \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+q-1)}{1.2\ldots(q-1)} \frac{z^m}{\beta^{m+q}} + \ldots;$$

(¹) *Voir* les travaux de M. Pincherle et notamment son beau Mémoire *Sur le Calcul fonctionnel distributif* (*Mathematische Annalen*, t. 49).

on obtient

$$f(z) = \sum \varpi(m) \left(\frac{z}{\alpha\beta}\right)^m,$$

$\varpi(m)$ étant un polynome en m de degré $p + q - 2$. On en conclut immédiatement que $f(z)$ admet le point $z = \alpha\beta$ comme pôle d'ordre $p + q - 1$; il serait aisé de compléter ce calcul et de le rendre plus élégant; nous nous contentons d'en énoncer le résultat essentiel :

Si le point α est un pôle d'ordre p pour $\varphi(z)$ et le point β un pôle d'ordre q pour $\psi(z)$, le point $\alpha\beta$ est un pôle d'ordre $p + q - 1$ pour $f(z)$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\varphi(z) = \frac{A}{1 - z} = A(1 + z + z^2 + \ldots),$$

la fonction $\psi(z)$ étant quelconque; on a alors visiblement

$$f(z) = A\psi(z).$$

On en conclut immédiatement que :

Si le point α est un pôle simple de $\varphi(z)$, la singularité de $f(z)$ en $\alpha\beta$ est la même, à un facteur constant près, que la singularité de $\psi(z)$ en β.

Si l'on avait

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1 - z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} + (n+1)z^n + \ldots$$

on en conclurait

$$f(z) = b_0 + 2b_1 z + 3b_2 z^2 + \ldots = \frac{d}{dz}[z\psi(z)],$$

d'où un théorème analogue au précédent pour le cas où α est un pôle double de $\varphi(z)$. D'une manière générale, α étant un pôle multiple de $\varphi(z)$, la connaissance des coefficients des puissances négatives de $z - \alpha$ dans le développement de $\varphi(z)$ au voisinage de ce point permet de former une expression différentielle $D\psi$:

$$D\psi = A_1\psi + A_2 \frac{d}{dz}(z\psi) + A_3 \frac{d^2}{dz^2}(z^2\psi) + \ldots + A_n \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^{n-1}\psi),$$

telle que la singularité $\alpha\beta$ pour $f(z)$ soit la même que la singularité β pour $D\psi$.

Dans le cas où $z = \alpha$ serait un point singulier essentiel isolé de $\varphi(z)$ on serait amené à considérer une expression $D\psi$ d'ordre infini. Ces expressions ont été étudiées par M. Pincherle dans divers Mémoires fort intéressants [1], mais nous laisserons cette question de côté pour le moment.

Dans le cas où les points singuliers α et β sont d'une nature plus compliquée, on ne peut rien dire en général; une étude spéciale est nécessaire pour chaque cas particulier. Le lecteur traitera aisément le cas où l'on a $\varphi(x) = \log(1-x)$. Nous allons dire quelques mots des singularités algébriques des plus simples. Soit [2]

$$\varphi(z) = (1-z)^{-\alpha} = \sum \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{m!} z^m,$$

$$\psi(z) = (1-z)^{-\beta} = \sum \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{m!} z^m,$$

on obtient

$$f(z) = \sum \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{(m!)^2} z^m,$$

c'est-à-dire, d'après la notation de Gauss,

$$f(z) = F(\alpha, \beta, 1, z).$$

Nous ne discuterons pas ce résultat, qu'on déduirait tout aussi aisément de la représentation de $f(z)$ par une intégrale définie; mais on voit combien les singularités algébriques les plus simples de $\varphi(z)$ et de $\psi(z)$ peuvent introduire de complication dans $f(z)$. Aussi nous attacherons-nous particulièrement à l'étude du cas où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont uniformes; mais une remarque importante doit d'abord être faite.

III.

Nous avons dit que la nature de la singularité $\alpha\beta$ pour $f(z)$ ne dépendait que de la nature des singularités α et β. Mais notre dé-

---

(1) *Voir* notamment le Mémoire cité plus haut.

(2) L'emploi des lettres α et β ne peut entraîner aucune confusion avec ce qui précède.

monstration supposait implicitement que la singularité $\alpha\beta$ n'était obtenue qu'au moyen *d'un seul couple* (α, β); en d'autres termes, que l'on n'avait pas

$$\alpha\beta = \alpha'\beta',$$

α et α' étant des points singuliers de φ, β et β' des points singuliers de ψ. Dans le cas où cette circonstance se produit, le point singulier $\alpha\beta$ doit être regardé comme double et l'on obtient sa nature en superposant (par voie d'addition), la singularité (déterminée) résultant de la combinaison de α avec β et la singularité (déterminée) résultant de la combinaison de α' avec β'. Il pourra arriver, en particulier, que ces singularités se détruisent et, par suite, que $f(z)$ soit régulière en $\alpha\beta$. C'est ce qui a lieu, par exemple, si l'on prend

$$\varphi(z) = \sum a_{2n} z^{2n},$$

$$\psi(z) = \sum b_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Il importe, d'ailleurs, de remarquer que, si les fonctions φ et ψ étant multiformes, les points α et β ne sont singuliers que pour certaines branches de ces fonctions (en nombre fini on infini), il en est de même du point $\alpha\beta$ relativement à $f(z)$. Les singularités $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ ne doivent être regardées comme coïncidentes que si elles appartiennent à la même branche.

Il nous paraît inutile d'insister sur ce dernier point; car, pour embrasser des cas assez généraux, on serait amené à des énoncés compliqués et dont l'application serait moins aisée, dans un cas particulier déterminé, que l'étude directe du problème dans ce cas. D'ailleurs la complication des singularités obtenues et aussi la complication des coefficients des développements de Taylor ne permettent guère d'espérer que le théorème de M. Hadamard soit susceptible d'applications très étendues dans le cas où les fonctions φ et ψ ne sont pas uniformes. Nous allons voir, au contraire, qu'en supposant ces fonctions uniformes on arrive à des conséquences fort simples, dont les applications semblent pouvoir être nombreuses.

IV.

Nous désignons, d'une manière générale, par α un point singulier de $\varphi(z)$, par β un point singulier de $\psi(z)$, par $\gamma = \alpha\beta$ un point singulier de $f(z)$. Nous supposons les points α et β isolés; nous supposons de plus le point γ *obtenu d'une manière unique et isolé*. Ces conditions s'expriment comme il suit : il existe un nombre ε tel que l'on ait

$$(1) \qquad |\gamma - \alpha'\beta'| > \varepsilon,$$

du moment que α' et β' ne sont pas respectivement égaux à α et β.

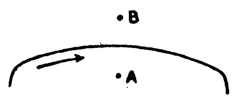
Nous allons faire voir que *si les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont respectivement uniformes au voisinage des points α et β, la fonction $f(z)$ est uniforme au voisinage du point γ*. Dans ce but, nous ferons décrire à z un petit cercle (de rayon inférieur à ε) autour de γ et nous constaterons que $f(z)$ reprend sa valeur initiale.

Récrivons l'expression

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \psi\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(zx)\,\frac{dx}{x}.$$

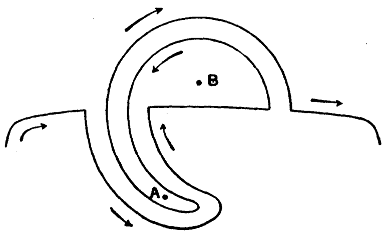
L'inégalité (1) montre tout d'abord que, lorsque z décrit autour de γ un cercle de rayon égal à ε, le point $\frac{\alpha'}{z}$ décrit un cercle *auquel le point $\frac{1}{\beta'}$ est extérieur*. Il en résulte que nous n'avons à tenir aucun compte de ces singularités; il suffit d'étudier celles qui correspondent à α et β, c'est-à-dire $\frac{\alpha}{z}$ et $\frac{1}{\beta}$. Figurons-les en A et B, ainsi qu'une portion du contour d'intégration, qui, comme on sait, les

Fig. 1.



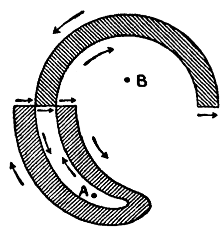
sépare (*fig.* 1). Lorsque le point z tourne autour de γ, le point A tourne autour de B, ce qui entraîne la modification du contour d'intégration indiquée dans la *fig.* 2 (on a supposé que A tourne dans le sens direct; z tourne alors dans le sens indirect). Le point A ayant repris la même position, on aura la différence des deux valeurs de $f(z)$ en cherchant la différence des valeurs de l'intégrale le long des contours des *fig.* 1 et 2. Comme la fonction à intégrer est uniforme dans cette région, cette différence est égale

Fig. 2.



à la valeur de l'intégrale le long d'un contour, *différence de ces deux contours*. Ce contour est représenté sur la *fig.* 3 et l'on voit

Fig. 3.



immédiatement qu'il se décompose en deux contours fermés, entourant respectivement des aires (couvertes de hachures) dépourvues de singularités. La différence cherchée est donc nulle, ce qui établit l'uniformité de $f(z)$, puisque A est un point quelconque dans le voisinage de B, c'est-à-dire z un point quelconque dans le voisinage de γ.

On conclut immédiatement de là que, si les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions uniformes dans tout le plan, n'admettant que des singularités *isolées* (pôles ou points essentiels), *il en est de même de la fonction* $f(z)$. En effet, les points α et β étant isolés, et les modules respectifs de α et β étant supérieurs à des nombres fixes R et R', les points $\gamma = \alpha\beta$ sont nécessairement isolés. Plusieurs d'entre eux, *en nombre limité,* peuvent coïncider; mais cela n'occasionne aucune difficulté, la somme d'un nombre limité de fonctions uniformes étant elle-même uniforme.

L'extension de ce résultat aux fonctions uniformes à singularités ponctuelles les plus générales, étudiées par M. Mittag-Leffler dans un Mémoire bien connu ([1]), se ferait par des méthodes analogues à celles de ce Mémoire.

On montrerait d'abord que les points α et les points β formant deux ensembles parfaits dénombrables (extérieurs aux cercles de rayons R et R') il en est de même de l'ensemble des points $\gamma = \alpha\beta$, complété, s'il y a lieu, par l'adjonction de son dérivé.

On montrerait ensuite que la fonction $f(z)$ est uniforme au voisinage des points *isolés* de γ.

Enfin, il resterait à faire voir que la fonction $f(z)$, uniforme au voisinage des points isolés de γ, est uniforme dans tout le plan.

Mais il nous semble inutile de développer explicitement cette démonstration, dont le succès n'est pas douteux, car les fonctions uniformes *à singularités ponctuelles*, dont on connaît *effectivement* un développement de Taylor, ont des singularités assez simples pour qu'il ne se présente, dans les applications, aucune difficulté.

V.

Indiquons, en passant, une généralisation des résultats précédents, qui nous a été suggérée par une remarque de M. Leau ([2]).

Considérons un nombre quelconque de séries de Taylor, et, pour plus de netteté, supposons qu'elles représentent des fonctions méromorphes

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n,$$

$$\psi(z) = \sum b_n z^n,$$

$$\chi(z) = \sum c_n z^n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\omega(z) = \sum l_n z^n.$$

Soit $P(a, b, c, \dots, l)$ un polynôme quelconque : *la série*

$$f(z) = \sum P(a_n, b_n, c_n, \dots, l_n) z^n$$

représente une fonction méromorphe.

([1]) *Acta mathematica*, tome 4.

([2]) Séance de la Société du 9 novembre 1898.

VI.

Il n'est pas inutile de remarquer que le théorème sur l'uniformité ne serait pas vrai sans restrictions, dans le cas de singularités quelconques. Il est aisé de le faire voir par un exemple. Soit

$$f(z) = \sqrt{1-z} = \sum c_n z^n,$$

les c_n étant des coefficients qu'il est inutile d'expliciter; retenons seulement qu'ils sont réels [1]. Il résulte de travaux récents sur les séries de Taylor que l'on peut déterminer [2] les arguments θ_n *de telle sorte que la série*

$$\varphi(z) = \sum e^{-i\theta_n} z^n$$

admette son cercle de convergence comme coupure, et qu'il en soit de même de la série

$$\psi(z) = \sum c_n e^{i\theta_n} z^n.$$

Dès lors les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont manifestement uniformes dans leurs domaines d'existence (qui se réduisent tous deux au cercle de rayon *un*); et la méthode de M. Hadamard permet d'en déduire une fonction non uniforme [3].

Il resterait à étudier le cas où les fonctions uniformes $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ posséderaient un ensemble non dénombrable de singularités, sans avoir de lignes singulières (ensembles de M. Bendixson).

---

(1) De plus $\sqrt[n]{c_n}$ tend régulièrement vers *un*.

(2) *Voir* Borel, *Comptes rendus,* octobre 1896. Fabry, *Annales de l'École Normale,* 1896; *Acta mathematica,* tome 22; *Journal de Mathématiques,* 1898. Leau, *Comptes rendus,* 24 octobre 1898.

(3) On pourrait rattacher ce fait à une remarque que j'ai faite dans ma Thèse, p. 13 (*Annales de l'École Normale,* 1895, p. 21), sur la difficulté de définir l'uniformité d'une fonction analytique qui possède une ligne singulière essentielle, si l'on ne veut pas se borner au point de vue de Weierstrass.