Bulletin de la S. M. F.

P. A. MacMahon

# Solution du problème de partition d'où résulte le dénombrement des genres distincts d'abaques relatifs aux équations à $n$ variables

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 26 (1898), p. 57-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__57_1>

# MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

## SOLUTION DU PROBLÈME DE PARTITION D'OU RÉSULTE LE DÉNOMBREMENT DES GENRES DISTINCTS D'ABAQUE RELATIFS AUX ÉQUATIONS A $n$ VARIABLES;

Par M. le Major P.-A. Mac-Mahon, R. A., F. R. S.

Un problème très intéressant de partition a été proposé par M. Maurice d'Ocagne sous l'énoncé que voici :

« De combien de manières peut-on composer le nombre $n$ comme somme de 8 nombres

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n'_1 & n'_2 & n'_3 & n'_4 \end{matrix}$$

(pouvant être nuls), deux solutions n'étant considérées comme distinctes que si l'on ne peut passer de l'une à l'autre par permutation soit des deux lignes, soit des quatre colonnes ci-dessus [1]? »

Il a, en outre, fait la remarque : « Pour $n=3$ et $n=4$, j'ai trouvé ce nombre égal à 7 et à 19. Je voudrais une solution générale. »

Le problème posé ne s'applique qu'à deux lignes et à quatre colonnes; mais j'observerai dès le début que le problème relatif à deux lignes et à un nombre arbitraire $s$ de colonnes n'est exactement pas plus difficile.

Prenant pour l'instant $s=4$, tout arrangement

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n'_1 & n'_2 & n'_3 & n'_4 \end{matrix}$$

où

$$n_1+n_2+n_3+n_4=\alpha, \qquad n'_1+n'_2+n'_3+n'_4=\alpha'$$

et

$$\alpha+\alpha'=n,$$

nous donne la partition bipartitive

$$(\overline{n_1 n'_1}\ \ \overline{n_2 n'_2}\ \ \overline{n_3 n'_3}\ \ \overline{n_4 n'_4})$$

du nombre bipartitif $(\alpha\alpha')$.

Tout arrangement obtenu en partant de là par permutation des colonnes donne la même partition bipartitive de $(\alpha\alpha')$. Si nous prenons en considération les divers arrangements des colonnes, nous avons en correspondance les différentes compositions associées à la partition. Comme les arrangements ne sont pas tenus pour distincts s'ils ne diffèrent que par une permutation des colonnes, nous n'avons évidemment à nous occuper que des partitions.

D'autre part, puisque deux solutions sont regardées comme identiques si l'on peut passer de l'une à l'autre par interéchange des lignes, nous pourrons toujours, dans la suite, considérer $\alpha$ comme supérieur ou égal à $\alpha'$, et nous n'avons à envisager que les partitions de $n$ en deux parties. La partition $(\alpha\alpha')$ peut prendre

---

[1] Si l'on se reporte aux pages 21 et 22 de ce Volume, on voit que ce problème équivaut à celui-ci : Combien y a-t-il de genres distincts d'abaques applicables à des équations à $n$ variables? (M. O.)

l'une quelconque des formes

$$(n, 0), \quad (n-1, 1), \quad (n-2, 2), \quad \ldots.$$

Si $n$ est impair, $\alpha$ doit être pris supérieur à $\alpha'$.

Il nous faut dénombrer les partitions de chacun des nombres bipartitifs

$$(\alpha\alpha') \qquad [\alpha + \alpha' = n, \ \alpha \geqq \alpha'],$$

en $s$ ou un nombre moindre de nombres bipartitifs.

La fonction génératrice peut immédiatement s'écrire. C'est

$$\frac{1}{\begin{array}{c} 1-a \\ (1-ax)(1-ay) \\ (1-ax^2)(1-axy)(1-ay^2) \\ (1-ax^3)(1-ax^2y)(1-axy^2)(1-ay^3) \\ (1-ax^4)(1-ax^3y)(1-ax^2y^2)(1-axy^3)(1-ay^4) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}}$$

Les partitions de $(\alpha\alpha')$ en $s$ ou un nombre moindre de parties sont dénombrées par les coefficients de

$$a^s x^\alpha y^{\alpha'},$$

dans le développement suivant les puissances croissantes de $x$ et $y$.

Prenant la somme de ces coefficients pour

$$\alpha + \alpha' = n, \qquad \alpha \geqq \alpha',$$

nous obtenons le dénombrement demandé par les termes du problème proposé, si toutefois $n$ est impair.

Si $n$ est impair, $\alpha$ ne peut pas être égal à $\alpha'$ et le coefficient de $a^s x^\alpha y^{\alpha'}$ est la demi-somme des coefficients de $a^s x^\alpha y^{\alpha'}$ et $a^s x^{\alpha'} y^\alpha$ dans chaque cas. Par conséquent, le nombre cherché est la demi-somme des coefficients de tous les termes $a^s x^\alpha y^{\alpha'}$ où $\alpha + \alpha' = n$, et $\alpha$, $\alpha'$ ne sont sujets à aucune autre condition. Donc, lorsque $n$ est impair, nous pouvons faire $y = x$, ce qui nous donne la fonction génératrice

$$\frac{1}{2} \, \frac{1}{(1-a)(1-ax)^2(1-ax^2)^3(1-ax^3)^4 \ldots},$$

et le nombre cherché est donné par le coefficient de $a^s x^n$ dans le développement suivant les puissances croissantes de $x$.

Dans le cas de $n$ impair, on a ainsi la solution complète du problème.

Quand $n$ est pair, la sommation des coefficients ne se fait pas aussi aisément. Cela provient en partie du fait que le terme en $x^{\frac{1}{2}n} y^{\frac{1}{2}n}$ se présente seul et ne s'associe pas avec un autre terme.

Soit $n = 2\alpha$.

Dans l'arrangement des deux lignes supposons $s = 4$ :

1° Nous avons une solution

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{matrix}$$

où $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \alpha$, qui est unique et ne peut être doublée par un interéchange des lignes;

2° Nous avons une solution telle que

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ n_1 & n_2 & 0 & n_3 \end{matrix}$$

qui possède la propriété de ne pas se modifier par interéchange des deux lignes complété par un interéchange subséquent de colonnes.

En général, si

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4 = \alpha,$$

la solution

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n'_1 & n'_2 & n'_3 & n'_4 \end{matrix}$$

est unique si

$$\begin{matrix} n'_1 & n'_2 & n'_3 & n'_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{matrix}$$

peut lui être rendue identique par une permutation de colonnes.

Dans ce cas, la partition bipartitive

$$(\overline{n_1 n'_1} \quad \overline{n_2 n'_2} \quad \overline{n_3 n'_3} \quad \overline{n_4 n'_4})$$

est la même que

$$(\overline{n'_1 n_1} \quad \overline{n'_2 n_2} \quad \overline{n'_3 n_3} \quad \overline{n'_4 n_4}).$$

Il est clair par conséquent que, quand $n$ est pair et égal à $2\alpha$, nous n'avons pas à introduire dans le dénombrement toutes les partitions de $(\alpha\alpha)$, mais seulement celles qui restent inaltérées par la substitution

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n'_1 & n'_2 & n'_3 & n'_4 \end{pmatrix},$$

suivant la notation habituelle de la théorie des substitutions, ajoutées à la moitié de celles qui ne restent pas inaltérées.

Si A est le nombre de celles qui restent inaltérées, B le nombre de celles qui sont altérées, nous avons le nombre

$$A + \tfrac{1}{2}B.$$

Par la fonction génératrice déjà construite, nous avons obtenu

$$\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B.$$

Il nous reste conséquemment à ajouter

$$\tfrac{1}{2}A.$$

Pour dénombrer les formes A, on peut observer que si

$$(\overline{n_1 n'_1} \quad \overline{n_2 n'_2} \quad \overline{n_3 n'_3} \quad \overline{n_4 n'_4})$$

est une des bipartitions en question, on doit pouvoir la décomposer en parties qui soient de la forme $(n_1 n_1)$ ou de la forme $(\overline{n_1 n_2} \; \overline{n_2 n_1})$.

Un terme $x^\gamma y^\gamma$ peut être retenu dans la fonction génératrice pour une puissance quelconque et un terme $x^\gamma y^\delta$ doit être associé à un terme $x^\delta y^\gamma$.

Nous prendrons donc comme fonction génératrice pour les formes A :

$$\frac{1}{\begin{array}{c}(1-a) \\ (1-pax)\left(1-\frac{1}{p}ay\right) \\ (1-qax^2)(1-axy)\left(1-\frac{1}{q}ay^2\right) \\ (1-rax^3)(1-sax^2y)\left(1-\frac{1}{s}axy^2\right)\left(1-\frac{1}{r}ay^3\right) \\ (1-tax^4)(1-uax^3y)(1-ax^2y^2)\left(1-\frac{1}{u}axy^3\right)\left(1-\frac{1}{t}ay^4\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}},$$

dans laquelle nous devons prendre le coefficient de

$$a^s x^\alpha y^\alpha,$$

en excluant tous les termes qui renferment les puissances positives ou négatives de $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, ....

Cela peut être beaucoup simplifié parce que

$$\frac{1}{(1-ja\mathrm{X})\left(1-\frac{1}{j}a\mathrm{Y}\right)} = \frac{1}{1-a^2\mathrm{XY}} + \text{des termes qui dépendent de } j.$$

Conséquemment, la fonction génératrice devient

$$\frac{1}{\begin{array}{c}(1-a)\\ (1-a^2xy)\\ (1-axy)(1-a^2x^2y^2)\\ (1-a^2x^3y^3)^2\\ (1-ax^2y^2)(1-a^2x^4y^4)^2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}},$$

ou, mieux,

$$\frac{1}{\begin{array}{c}(1-a)(1-axy)(1-ax^2y^2)(1-ax^3y^3)(1-ax^4y^4)\ldots\\ \cdot(1-a^2xy)(1-a^2x^2y^2)(1-a^2x^3y^3)^2(1-a^2x^4y^4)^2\ldots\end{array}}.$$

Pour déduire de là $\frac{1}{2}\mathrm{A}$, nous devons prendre la moitié du coefficient de $a^s x^\alpha y^\alpha$. Posant $y = x$, nous avons la fonction génératrice

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\begin{array}{c}(1-a)(1-ax^2)(1-ax^4)(1-ax^6)\ldots(1-ax^{4t-2})(1-ax^{4t})\ldots\\ (1-a^2x^2)(1-a^2x^4)(1-a^2x^6)^2\ldots(1-a^2x^{4t-2})^t(1-a^2x^{4t})^t,\ldots\end{array}},$$

dans laquelle nous devons prendre le coefficient de $a^s x^n$.

Si l'on remarque que le développement de cette fonction ne contient que des puissances paires de $x$, on peut dire que, *dans tous les cas,* le nombre des partitions demandées pour le nombre $n$ admet la fonction génératrice

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-a)(1-ax)^2(1-ax^2)^3\ldots(1-ax^{t-1})^t\ldots}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\begin{array}{c}(1-a)(1-ax^2)(1-ax^4)\ldots(1-ax^{4t-2})(1-ax^{4t})\\ (1-a^2x^2)(1-a^2x^4)\ldots(1-a^2x^{4t-2})^t(1-a^2x^{4t})^t\end{array}},$$

dans le développement de laquelle on doit prendre le coefficient de $a^s x^n$.

Dans une lettre subséquente, M. d'Ocagne me signalait l'intérêt, en vue des recherches qu'il poursuit, de dénombrer les solutions dans lesquelles les nombres $n_i$ et $n'_i$ ne doivent pas excéder les valeurs 1 et 2 [1].

Il est facile d'imposer une limite quelconque à la grandeur de ces nombres.

Supposons cette limite d'abord égale à 1.

Dans la fonction génératrice en $x$ et $y$ nous devons rejeter tous les termes qui renferment $x$ et $y$ à des puissances supérieures à 1.

Par conséquent, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-a)(1-ax)(1-ay)(1-axy)}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-a)(1-axy)(1-a^2xy)}$$

et, en posant $x=y$,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-a)(1-ax)^2(1-ax^2)}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-a)(1-ax^2)(1-a^2x^2)},$$

pour la fonction demandée.

De même, si la grandeur des nombres $n_i$ et $n'_i$ est limitée à 2, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-a)(1-ax)^2(1-x^2)^3(1-ax^3)^2(1-ax^4)}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-a)(1-ax^2)(1-ax^4)(1-a^2x^2)(1-a^2x^4)(1-a^2x^6)},$$

et, en général, si la grandeur est limitée à $k$, nous obtenons faci-

---

[1] Cela fait connaître, pour les équations à $n$ variables, le nombre des genres d'abaques constitués au moyen d'éléments à deux cotes ou à une cote au maximum. (M. O.)

lement la fonction génératrice

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-a)(1-ax)^2(1-ax^2)^3\ldots(1-ax^k)^{k+1}(1-ax^{k+1})^k\ldots(1-ax^{2k})}$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\begin{array}{c}(1-a)(1-ax^2)(1-ax^4)\ldots(1-ax^{2k})\\ (1-a^2x^2)(1-a^2x^4)(1-a^2x^6)^2(1-a^2x^8)^2\ldots\\ (1-a^2x^{4k-2})(1-a^2x^{4k-4})(1-a^2x^{4k-6})^2(1-a^2x^{4k-8})^2\ldots\end{array}},$$

où, dans le dénominateur de la seconde fraction, la deuxième et la troisième ligne procèdent suivant les indices

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c|cc|c|} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \ldots & \frac{1}{2}(k-1) & \frac{1}{2}(k-1) & \frac{1}{2}(k-1) \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & & \frac{1}{2}(k-1) & \frac{1}{2}(k-1) & \end{array}$$

si $k$ est impair; suivant les indices

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c|cc|cc|} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \ldots & \frac{1}{2}(k-2) & \frac{1}{2}(k-2) & \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & & \frac{1}{2}(k-2) & \frac{1}{2}(k-2) & \frac{1}{2}k & \end{array}$$

si $k$ est pair.

J'espère, dans une autre occasion, traiter le problème plus général pour lequel le nombre des lignes est trois ou plus, problème qui ne me semble pas présenter de difficultés insurmontables.