Bulletin de la S. M. F.

L. Leau

Sur un problème d'itération

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 5-9
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__5_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN PROBLÈME D'ITÉRATION ;

Par M. L. Leau.

1. *Problème.* — Déterminer les fonctions $f(x)$ telles que l'on ait identiquement $f_n(x) = x$, en posant

$$f_1(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad f_p(x) = f_{p-1}[f(x)].$$

Étudions avec quelques détails cette question que M. Lémeray a récemment signalée ([1]) comme cas particulier d'une autre plus générale, et que j'avais déjà eu l'occasion de considérer ([2]).

2. Occupons-nous des *fonctions uniformes*. Si dans un certain domaine D les fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sont définies, et si l'on a en un point x_0 de ce domaine

$$f_1(x_0) = y_0,$$

l'équation $f_1(x) = y_0$ n'admet que la racine x_0, car $f_{n-1}(y_0)$ doit ramener la valeur initiale de x, qui est ainsi unique.

Il est intéressant de remarquer qu'il résulte de là que la fonction $f_1(x)$ établit la représentation conforme de D sur une aire D_1, de celle-ci, sur une aire D_2, ..., cette représentation étant en quelque sorte *réciproque*, en ce sens que les fonctions f_i et f_{n-i} servent respectivement à représenter D sur D_i et D_i sur D.

([1]) *Comptes rendus* du 27 décembre 1897.

([2]) Thèse, page 59; librairie Gauthier-Villars.

3. Un cas particulièrement simple est celui où l'on cherche des fonctions uniformes dans tout le plan et n'ayant d'autres singularités que des pôles et des points singuliers essentiels isolés, à distance finie ou non. Et d'abord, il ne peut pas y avoir de pareils points singuliers essentiels. Soient, par exemple, $n=2$, a un point singulier essentiel isolé, et b un point ordinaire. Dans le voisinage de $x=a$, f peut s'approcher autant qu'on veut de b. Inversement, pour une certaine suite de positions ayant b pour limite, $f(x)$ est infiniment voisin de a; donc $f(b)=a$. Or b est un point ordinaire quelconque; donc f serait constant.

Le raisonnement s'étend évidemment à n quelconque.

Nous n'avons donc à chercher les fonctions inconnues que parmi fractions rationnelles.

S'il n'y a pas de pôle à distance finie, la fonction se réduit évidemment au binôme

$$ax+b,$$

où a est racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité et b une constante arbitraire, nulle si $a=1$.

Cherchons maintenant une véritable fraction. Les termes en sont du premier degré au plus. Remarquons que si $f(x)$ est une fonction quelconque vérifiant l'identité $f_n(x)=x$, il en est de même des fonctions $f(c+x)-c$ et $\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$. On peut en profiter pour ramener le cas actuel au cas précédent, c étant supposé choisi de sorte que $f(c)=c$.

La nouvelle fonction $F(x)$ est alors $ax+b$, et l'on a

$$f(x)=\frac{(1+bc)(x-c)+ac}{b(x-c)+a},$$

où $a^n=1$, et b et c sont des constantes arbitraires, la première cependant étant nulle, si $a=1$. Telle est la solution complète dans les conditions posées.

4. Considérons maintenant, d'une manière beaucoup plus générale, une fonction $f(x)$, holomorphe dans un domaine A, les transformés d'une partie B de ce domaine étant tous à l'intérieur de ce dernier, et B et B_1 ayant une portion commune; et suppo-

sons qu'une des itératives de $f(x)$ se réduise à x. Soit $f_n(x)$ la première jouissant de cette propriété.

Nous allons montrer qu'à l'intérieur de A, il existe une racine simple de l'équation

$$f(x) - x = 0,$$

ou du moins de l'équation

$$f_d(x) - x = 0,$$

d étant un diviseur de n.

Partons d'un point arbitraire de B, x_0, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n = x_0$, ses transformés.

On peut choisir x_0 de manière que x_1 soit aussi dans B.

Si deux points consécutifs coïncidaient, ils seraient tous confondus et leur affixe vérifierait l'équation proposée. Il resterait, il est vrai, à prouver qu'elle est racine simple; mais ce cas est facile à éviter en changeant x_0. Joignons donc x_0 et x_1 par un chemin c_0 situé dans B; ce chemin et ses transformés $c_1, c_2, \ldots$ déterminent un contour fermé L, tout entier dans A.

Supposons, en premier lieu, que deux côtés quelconques de ce contour ne se coupent pas. Lorsqu'on le décrit, la variation de l'argument de $f(x) - x$ est égale à 2π (¹), ce qui établit la proposition.

En second lieu, supposons que les arcs c_{h+k} et c_h se coupent. Il y a alors sur c_0 deux points x' et x'' tels que

$$f_{h+k}(x') = f_h(x'') \qquad \text{ou} \qquad f_k(x') = x''.$$

Dès lors, le premier arc est coupé par un des suivants. Soit sur c_0 une partie c'_0 limitée à un point ξ et à un de ses transformés $f_k(\xi)$ ou ξ_k de telle sorte qu'il n'y ait sur cet arc ni d'autres transformés de ξ, ni de couple de points transformés l'un de l'autre. On peut toujours réaliser cette condition, sauf peut-être s'il y avait sur c_0 un point x' tel que $f_p(x') \doteq x'$, mais on peut toujours éviter ce cas, en modifiant c_0.

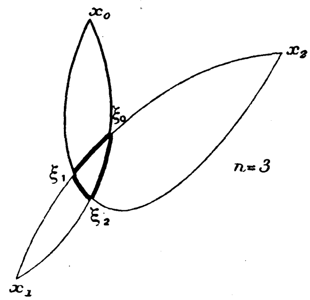
(¹) D'une manière plus générale, si deux points x et X décrivent un contour fermé L, ne se coupant pas lui-même, de manière à revenir à leurs positions initiales après un tour unique, et sans avoir coïncidé à un certain moment, l'argument de $X - x$ a varié de 2π.

Posons $F_1(x) = f_k(x)$. La portion c'_0 de c_0 comprise entre ξ et ξ_k jouera vis-à-vis de $F_1(x)$ le même rôle que c_0 tout à l'heure, vis-à-vis de $f_1(x)$, et engendrera un contour L′ à l'intérieur duquel l'équation

$$F(x) - x = 0$$

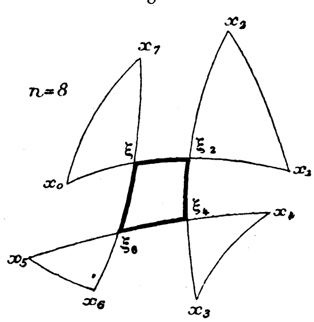
a une racine simple. Si k est premier avec n, la $n^{\text{ième}}$ itérative de $F(x)$ est la première qui se réduise à x. L′ est formé de parties appartenant à tous les côtés de L (*fig.* 1).

Fig. 1.



Si d est le plus grand commun diviseur de k et de n, la première itérative de $F(x)$ qui se réduise à x est $F_h(x)$ en posant $\frac{n}{d} = h$, L′ ne comprend pas des parties de tous les côtés de L (*fig.* 2).

Fig. 2.



Dans tous les cas, L′ comprend à son intérieur une racine a et une seule de l'équation

$$F(x) - x = 0.$$

Si k est premier avec n, on peut trouver deux entiers λ et μ

tels que $\lambda n - \mu k = \pm 1$, d'où

$$f[F_\mu(x)] = x \qquad \text{ou} \qquad F_\mu(x) = f(x).$$

Dans les deux cas

$$f(a) = a.$$

Si k et n ont un plus grand commun diviseur d, on voit de même que

$$f_d(a) = a.$$

5. Que d soit ou non égal à 1, posons

$$f_d(a + x) - a = \mathfrak{F}(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{n}{d} = h.$$

$\mathfrak{F}_h(x)$ est la première itérative de $\mathfrak{F}$ qui se réduit à x et $\mathfrak{F}(x)$ admet o pour racine simple.

Le produit $x\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\ldots\mathfrak{F}_{h-1}$ reste invariable pour la substitution $\mathfrak{F}$. Les racines $h^{\text{ièmes}}$, holomorphes à l'origine où elles s'annulent, se permutent par cette substitution. Soit $G(x)$ l'une de ces racines, on a

$$G(\mathfrak{F}) = l_1 G(x),$$

l_1 étant une racine primitive de l'équation

$$x^h - 1 = 0.$$

Ainsi l'équation précédente, où $G(x)$ est une fonction holomorphe à l'origine qu'elle admet pour racine simple, est vérifiée par

$$f_d(a + x) - a.$$

Réciproquement, une pareille équation définit évidemment une fonction $\mathfrak{F}$, holomorphe et nulle à l'origine, dont la $h^{\text{ième}}$ itération est x, et c'est d'ailleurs la première qui s'y réduise.

Telle est la conclusion à laquelle nous arrivons.

Il est inutile d'insister sur les analogies que présentent les fonctions f que nous venons de considérer, avec les racines de l'unité [1].

---

[1] Babbage a posé le problème en 1820. On trouvera la solution qu'il en avait donnée dans le *Traité d'Analyse* de M. Laurent, tome VI.