H. DELANNOY

Sur la probabilité des événements composés

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 64-70
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__64_1>

SUR LA PROBABILITÉ DES ÉVÉNEMENTS COMPOSÉS;

Par M. H. Delannoy.

Dans les *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (Congrès de Carthage, p. 1; 1896), un mathématicien distingué, M. le Rév. T.-C. Simmons, examine la probabilité des événements composés, dans le cas où les événements sont indépendants. Il critique la définition de Moivre (1) et le troisième principe de Laplace (2).

(1) Deux événements sont indépendants quand ils n'influent pas l'un sur l'autre et que l'arrivée de l'un n'avance ni ne retarde l'arrivée de l'autre. Deux événements sont dépendants quand ils se rattachent tellement que la probabilité de l'arrivée de l'un est changée par l'arrivée de l'autre.

(2) Si les événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières.

« Ce principe et cette définition, dit-il, ont été acceptés, autant que je sache, avec confiance, jusqu'ici, par tous les mathématiciens.... Je me propose de montrer que cette confiance n'est pas toujours justifiée et que, au contraire, si l'on accepte la définition de Moivre, le principe de Laplace peut donner naissance, dans certains cas, à de graves erreurs. »

Il en donne trois exemples que je reproduis ci-après, mais qui sont loin de me paraître concluants. Si la règle de Laplace y paraît en défaut, c'est que les événements ne sont pas indépendants, comme je vais le prouver.

Exemple I.

Trois points sont pris au hasard sur une droite. Quelle est la probabilité pour que les deux derniers se trouvent sur un seul des deux segments déterminés par le premier?

« Soient PQ la droite, A le premier point, B, C les deux autres. La probabilité de l'incidence de B sur PA (il va sans dire que l'on n'a pas observé la longueur de PA) ou de C sur PA est, dans chaque cas, $\frac{1}{2}$; les deux événements, selon Moivre, sont indépendants, car la position de B sur PQ n'influe aucunement sur la position de C sur PQ. Selon Laplace, la probabilité pour que B, C se trouvent tous les deux sur PA est $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, et la probabilité pour qu'ils se trouvent sur le même segment de PQ est $\frac{1}{2}$. Mais cette dernière probabilité devrait être $\frac{1}{3}$ (1), comme on le voit très facilement. Conséquemment, si l'on accepte la définition de Moivre, le principe de Laplace n'est pas applicable ici. »

Ce premier exemple est identique au problème des *trois coffrets* donné par M. Bertrand dans son *Traité des probabilités* (p. 2).

---

(1) Il faut lire $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{1}{3}$. M. Simmons me dit qu'il y a là une simple faute d'impression.

La probabilité que B soit à droite de A est $\frac{1}{2}$; mais, cette position de B admise, il y a plus de chances pour que C soit à droite de A plutôt qu'à gauche, la probabilité est $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{1}{2}$.

En effet, le point B étant à droite de A, le point C pourra être :

Ou bien à droite de B et, *a fortiori*, de A;

Ou bien à gauche de B : alors deux cas, suivant que C est à droite ou à gauche de A.

Par conséquent, en tout trois cas, dont deux favorables.

La probabilité que B et C sont sur AQ est $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; même probabilité qu'ils sont sur PA. Donc, la probabilité que B et C seront sur un même segment de PQ est $\frac{2}{3}$.

Exemple II.

Une corde d'un cercle est déterminée en joignant deux points pris au hasard sur la circonférence. Trois cordes étant ainsi déterminées, quelle est la probabilité pour que leurs trois intersections se rencontrent en dedans du cercle?

« Soient A, B, C les trois cordes. Les intersections en dedans du cercle de BC, de CA et de AB sont trois événements que l'on peut désigner par P, Q, R. La position d'une corde quelconque A n'influe aucunement sur la position de B, ni de C; ainsi l'arrivée d'un événement quelconque P n'avance, ni ne retarde l'arrivée de Q, ni de R. Conséquemment, selon Moivre, P, Q, R sont absolument indépendants. La probabilité de P, ou de Q, ou de R, comme on voit très facilement, dans chaque cas, est $\frac{1}{3}$.

» Un mathématicien anglais (*Math. Quest. from educational Times,* Vol. LXV, Q. 12898. Londres, 1896) a déduit que, par conséquent, la probabilité de l'événement composé PQR est

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27},$$

et croit encore qu'il a raison. Mais la probabilité exacte devrait être $\frac{1}{15}$. »

De même que pour le premier exemple, il est inexact de dire que les événements sont indépendants. La rencontre de deux cordes à l'intérieur du cercle augmente les chances des rencontres ultérieures.

La probabilité que deux cordes A et B se rencontreront à l'intérieur du cercle est $\frac{1}{3}$. Mais, si cette rencontre a eu lieu, la probabilité que A rencontrera une troisième corde C est $\frac{2}{5}$ au lieu de $\frac{1}{3}$ et, ces deux rencontres admises, la probabilité que C rencontrera également B est encore augmentée; elle n'est plus $\frac{1}{3}$ ni $\frac{2}{5}$, elle est $\frac{1}{2}$. La probabilité que les trois cordes se rencontreront à l'intérieur du cercle est donc

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{15}.$$

Exemple III.

Deux hommes A *et* B *et deux dames* C *et* D, *tous inconnus les uns des autres, voyagent dans le même train, de l'indifférents compartiments de la première classe, m de la seconde classe et n de la troisième classe. Les probabilités pour que* A *voyage dans la première, seconde ou troisième classe sont respectivement proportionnelles à* λ, μ, ν, *et de même pour* B. *Les probabilités pour que* C *voyage dans la première, seconde ou troisième classe sont respectivement proportionnelles à* l, m, n, *et de même pour* D. *Prouver, pour toutes les valeurs de* λ, μ, ν (*excepté quand* $\lambda:\mu:\nu = l:m:n$), *que* A *et* B *se trouvent plus probablement en compagnie de la même dame que chacun avec une dame différente.*

« Prenons un cas simple, où le train se compose de trois compartiments seulement, deux de la première, un de la troisième classe. Supposons, sur deux fois que C voyage dans la première classe, qu'elle voyage une fois dans la troisième, et de même pour D; supposons que A voyage avec probabilité égale dans la première ou la troisième classe, et de même pour B. La probabilité pour que A se trouve avec C est donc

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

ce qui est aussi la probabilité pour que B se trouve avec C. Mais la probabilité pour que A et B se trouvent tous les deux avec C, au lieu d'être $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$, selon Laplace, est

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8}.$$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ étant la probabilité pour que A se trouve avec C et B avec D, ou réciproquement. »

La probabilité que C sera avec A est $\frac{1}{3}$, celle que C est avec B est aussi $\frac{1}{3}$, mais les deux événements sont-ils indépendants? Étant admis que C est avec A, elle ne pourra se trouver avec B qu'à la condition que A et B seront ensemble; il faut donc exclure toutes les combinaisons BC qui ne satisfont pas à cette condition. Dès lors, peut-on dire que le premier événement est sans influence sur le second (¹)?

La probabilité que A sera avec B est $\frac{3}{8}$,

celle que C est avec l'un des deux est $\frac{1}{3}$;

la probabilité que ces trois personnes seront réunies est donc

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8},$$

la quatrième personne D pouvant se trouver soit isolée, soit réunie aux trois premières.

(¹) M. Simmons a reconnu qu'il y avait là, dans son Mémoire, une erreur qui lui avait échappé.

Voici, du reste, tous les cas qui peuvent se présenter, avec leurs probabilités respectives :

	Probabilité.
1° ABCD..............	$\frac{3}{72}$
2° ABC | D............	$\frac{6}{72}$
3° ABD | C............	$\frac{6}{72}$
4° ACD | B............	$\frac{5}{72}$
5° BCD | A............	$\frac{5}{72}$
6° AB | CD............	$\frac{6}{72}$
7° AB | C | D...........	$\frac{6}{72}$
8° CD | A | B...........	$\frac{5}{72}$
9° AC | BD............	$\frac{5}{72}$
10° AD | BC............	$\frac{5}{72}$
11° AC | B | D...........	$\frac{5}{72}$
12° AD | B | C...........	$\frac{5}{72}$
13° BC | A | D...........	$\frac{5}{72}$
14° BD | A | C...........	$\frac{5}{72}$
Total..............	$\frac{72}{72} = 1$

(Les lignes de séparation verticales indiquent que les voyageurs sont dans des voitures différentes.)

Ces trois exemples ne prouvent donc rien contre la règle de Laplace. On pourra l'employer en toute sécurité quand les événements seront indépendants. Tout ce que l'on peut dire, c'est que, avant d'appliquer cette règle, il faut bien s'assurer si les événements, qui paraissent indépendants, le sont réellement, car l'apparence est parfois trompeuse.

M. Simmons me dit qu'il avait en vue de critiquer moins Laplace que la définition de Moivre, qui manque, en effet, de précision. M. Simmons y substitue la définition suivante, qui est bien préférable :

« Deux événements sont indépendants quand l'arrivée de l'un n'augmente ni ne diminue la probabilité de l'arrivée de l'autre. »

Pour présenter une bonne définition, Moivre n'aurait eu qu'à adopter l'inverse de celle qu'il a donnée pour les événements dépendants.

Il n'est pas toujours facile de reconnaître *a priori* si des événements sont indépendants on non. Dans les cas douteux, il sera plus sûr d'employer, comme le propose M. Simmons, la règle IV de Laplace.

J'aurais depuis longtemps envoyé cette Note à la *Société mathématique,* mais M. Simmons, qui avait reçu communication de mes observations, m'ayant fait connaître qu'il avait l'intention d'adresser à la *Société* un Mémoire explicatif, j'ai pensé qu'il était inutile de faire paraître deux articles sur le même sujet.

Tout récemment, M. Simmons m'a dit qu'il n'avait pas le temps d'écrire la rectification projetée et que, par suite, je pouvais publier mes observations. C'est ce qui m'a décidé à rédiger la présente Note. Il importe de ne pas laisser s'accréditer l'opinion erronée que la troisième règle de Laplace peut, dans certains cas, se trouver en défaut; elle n'y est jamais quand on l'applique à des événements réellement indépendants.