Bulletin de la S. M. F.

J. Beudon

Sur les singularités des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 77-80
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__77_1>

SUR LES SINGULARITÉS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE;

Par M. J. Beudon.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

on sait qu'elle admet des caractéristiques linéaires définies par les équations suivantes :

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial p_1} p_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p_n} = \frac{-dp_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Pour engendrer une intégrale quelconque, on choisit arbitrairement une multiplicité M_{n-1}^1 vérifiant l'équation proposée, et par chaque élément du premier ordre de cette multiplicité on fait passer une caractéristique.

Mais si cette multiplicité initiale M_{n-1}^1 est elle-même engendrée par des caractéristiques, le procédé précédent ne s'applique plus : je me propose de démontrer que, dans ce cas, il y a une infinité de surfaces intégrales qui contiennent cette multiplicité.

1. Une multiplicité M_{n-1}^1 peut toujours être définie de la façon suivante : on prend z et x_n en fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on écrit

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = p_1 + p_n \dfrac{\partial x_n}{\partial x_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_{n-1}} = p_{n-1} + p_n \dfrac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} \end{array} \right.$$

et il n'y a plus qu'une seule inconnue p_n; si cette multiplicité appartient à l'équation (1), on a

$$(3) \quad f\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1} - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}, p_n\right) = 0.$$

Cette équation permettra en général de calculer p_n sans ambiguïté; mais il pourra arriver que p_n ne figure plus dans cette équation.

Pour faire une discussion complète, il faudrait opérer comme l'indique M. Goursat dans ses *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, c'est-à-dire considérer, dans l'équation (1), $p_1, \ldots, p_n$ comme seules variables : elle représente alors une surface dans l'espace à n dimensions, et les équations (2) représentent une droite.

Il pourra arriver : ou bien que la droite (2) ne rencontre pas du tout la surface, auquel cas il y a impossibilité de faire passer une surface intégrale par la multiplicité M_{n-1}^1 considérée; ou bien que la droite soit sur la surface, et l'indétermination commence aux dérivées du premier ordre; ou bien que la droite soit tangente à la surface, et l'indétermination commence aux dérivées du second ordre; je n'étudierai que ce dernier cas.

La dérivée du premier membre de l'équation (3) par rapport à

p_n est alors nulle, et l'on a

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial p_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = 0.$$

Éliminant p_n entre les équations (3) et (4), on a une équation du premier ordre en z et x_n qui définit les multiplicités singulières.

J'effectue maintenant le changement de variables de Cauchy, qui consiste à remplacer les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y$, et je le choisis de manière que z, x_n, p_n étant considérés comme des fonctions de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, elles représentent des multiplicités singulières quel que soit y.

J'aurai

$$\frac{\partial z}{\partial y} = p_n \frac{\partial x_n}{\partial y},$$

d'où

$$\frac{\partial p_i}{\partial y} = \frac{\partial p_n}{\partial x_i} \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial p_n}{\partial y} \frac{\partial x_n}{\partial x_i}.$$

Différentions l'équation (1) par rapport à y; nous aurons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n\right) \frac{\partial x_n}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial y} - \frac{\partial p_n}{\partial y} \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial y} = 0;$$

le coefficient de $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ est nul par hypothèse, et l'on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right) \frac{\partial x_n}{\partial y} = 0.$$

Pour avoir des multiplicités M_{n-1}^1 appartenant à (1) quel que soit y, il faut

$$(5)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0.$$

Ces multiplicités sont donc définies par les équations (2), (4) et (5); on voit immédiatement qu'elles sont engendrées par les caractéristiques de l'équation (1).

Pour calculer les dérivées du second ordre, il faudra différentier l'équation (1) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$: on constatera aisément l'indétermination du calcul des éléments du second ordre relatifs aux multiplicités précédentes.

2. Une multiplicité singulière étant donnée, on peut faire un changement de variables tel qu'elle soit représentée par les équations

$$z = 0, \quad x_n = 0, \quad p_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_{n-1} = 0, \quad p_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1});$$

et même, en posant

$$z = z' + x_n \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

par

$$z = 0, \quad x_n = 0, \quad p_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_{n-1} = 0, \quad p_n = 0.$$

Dans ces conditions on a

$$\frac{\partial f}{\partial p_n} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n,)$$

pour les valeurs initiales précédentes.

L'équation (1) peut alors être mise sous la forme

$$p_{n-1} = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_{n-2} p_{n-2} + \beta z + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à 1 par rapport à x_n et p_n, et ne renfermant pas de termes où $x_1, \ldots, x_{n-1}$ figurent seuls.

Cette équation possède une intégrale holomorphe qui se réduit à une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n$ pour $x_{n-1} = 0$; mais, à cause des conditions précédentes, cette fonction, développée suivant les puissances de x_n, est de la forme

$$\varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-2}) x_n^2 + \varphi_3(x_1, \ldots, x_{n-2}) x_n^3 + \ldots.$$

Il y a donc une infinité de surfaces intégrales qui passent par la multiplicité singulière M_{n-1}^1 *engendrée par les caractéristiques.*