BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BRICARD

Note sur une propriété des fonctions elliptiques du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 91-98
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__91_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE;

Par M. Raoul Bricard.

1.

Dans une Note *Sur les fonctions elliptiques du second ordre*, insérée au *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai établi la propriété suivante :

Si t, u, v sont trois fonctions elliptiques du second ordre, aux mêmes périodes, d'un même argument z, il existe entre ces trois fonctions, en exceptant certains cas particuliers, deux relations distinctes qui sont linéaires par rapport à chacune d'elles.

$$(1)\quad \begin{cases} A\,tuv + B\,uv + C\,vt + D\,tu + E\,t + F\,u + G\,v + H = 0, \\ A'tuv + B'uv + C'vt + D'tu + E't + F'u + G'v + H' = 0, \end{cases}$$

A, B, ..., H' *désignant des constantes.*

Considérons en particulier les trois fonctions elliptiques du second ordre

$$t = f(z), \qquad u = f\left(z + \frac{2\omega}{3}\right), \qquad v = f\left(z + \frac{4\omega}{3}\right),$$

2ω désignant l'une quelconque des périodes communes à ces trois fonctions : on peut leur appliquer l'énoncé qui précède. Remarquons, en outre, qu'en éliminant successivement t, u, v entre les deux équations (1), on forme les équations doublement quadratiques qui relient deux à deux les trois fonctions considérées. Or, il est bien clair qu'en raison des formes choisies pour ces trois fonctions, les équations doublement quadratiques dont il s'agit doivent avoir les mêmes coefficients. Cela exige que chacune des équations (1) soit symétrique par rapport aux variables qu'elle renferme. Le système (1) est donc de la forme

$$A\,tuv + B\,(uv + vt + tu) + E\,(t + u + v) + H = 0,$$
$$A'\,tuv + B'\,(uv + vt + tu) + E'\,(t + u + v) + H' = 0.$$

Il suit de là que les quantités tuv, $uv+vt+tu$, $t+u+v$ sont fonctions linéaires d'un paramètre λ. On peut encore exprimer ainsi qu'il suit le résultat précédent :

Les trois fonctions elliptiques

$$t=f(z),\qquad u=f\left(z+\frac{2\omega}{3}\right),\qquad v=f\left(z+\frac{4\omega}{3}\right)$$

sont racines d'une équation de la forme

$$f(\theta)+\lambda\varphi(\theta)=0,$$

$f(\theta)$ *et* $\varphi(\theta)$ *étant des polynômes du troisième degré à coefficients constants.*

Ce théorème est un cas particulier du suivant, dont nous donnerons une démonstration indépendante des considérations qui précèdent :

Soit $f(z)$ *une fonction elliptique du second ordre, dont l'une des périodes est* 2ω. *Considérons les expressions*

$$t_0=f(z),\qquad t_1=f\left(z+\frac{2\omega}{n}\right),\qquad \ldots,\qquad t_{n-1}=f\left(z+\frac{n-1}{n}\,2\omega\right).$$

L'équation qui a pour racines t_0, t_1, $\ldots$, t_{n-1} *est de la forme*

$$(2)\qquad P(\theta)+\lambda Q(\theta)=0,$$

$P(\theta)$ *et* $Q(\theta)$ *désignant deux polynômes du degré* n, *à coefficients constants.*

Pour établir ce théorème, il suffit de montrer que les diverses fonctions symétriques élémentaires des quantités t_0, t_1, $\ldots$, t_{n-1} peuvent s'exprimer linéairement en fonction de l'une d'entre elles, par exemple de leur produit

$$t_0 t_1 \ldots t_{n-1}.$$

Considérons donc l'une de ces fonctions symétriques

$$P_k=\sum t_{h_1}t_{h_2}\ldots t_{h_k},\qquad (h_1, h_2, \ldots, h_k=0, 1, \ldots, n-1),$$

et formons l'expression

$$V = P_k - A_k t_0 t_1 \dots t_{n-1},$$

A_k étant une constante quelconque.

Considérée comme fonction de l'argument z, l'expression V est elliptique et de l'ordre $2n$. Ses pôles sont ceux des fonctions $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$, c'est-à-dire, en désignant par α et β les pôles de $f(z)$, les $2n$ quantités

$$\alpha, \quad \alpha - \frac{2\omega}{n}, \quad \dots, \quad \alpha - \frac{n-1}{n} 2\omega,$$

$$\beta, \quad \beta - \frac{2\omega}{n}, \quad \dots, \quad \beta - \frac{n-1}{n} 2\omega.$$

Nous supposerons d'abord que ces quantités sont toutes distinctes entre elles : les pôles de V sont donc simples.

Remarquons en outre que, pour démontrer le théorème dont il s'agit, on peut supposer la fonction f, multipliée au besoin par un facteur numérique, telle que, dans les environs du pôle α, elle admette un développement de la forme

$$f(z) = \frac{1}{z-\alpha} + R(z),$$

R étant une fonction holomorphe. On sait qu'alors, dans les environs du pôle β, son développement est de la forme

$$f(z) = \frac{-1}{z-\beta} + R_1(z),$$

R_1 étant une fonction holomorphe.

Ayant fait ces hypothèses, donnons à z la valeur $\alpha - \frac{l}{n} 2\omega$, l étant un nombre quelconque de la suite

$$0, 1, \dots, n-1.$$

Dans les environs de ce pôle, la fonction V admet un développement de la forme

$$\frac{\rho}{z - \left(\alpha - \frac{l}{n} 2\omega\right)} + R_2(z),$$

R_2 étant holomorphe. Il est aisé de former le résidu ρ, en se reportant à la définition de la fonction V. On trouve ainsi :

$$\rho = \sum f\left(\alpha - \frac{l}{n}2\omega + \frac{h_1}{n}2\omega\right)\dots f\left(\alpha - \frac{l}{n}2\omega + \frac{h_{k-1}}{n}2\omega\right)$$
$$- A_k f\left(\alpha - \frac{l}{n}2\omega\right) f\left(\alpha - \frac{l}{n}2\omega + \frac{2\omega}{n}\right)\dots f\left(\alpha - \frac{l}{n}2\omega + \frac{n-1}{n}2\omega\right).$$

Sous le signe $\sum$, les nombres $h_1, \dots, h_{k-1}$ doivent former toutes les combinaisons possibles des nombres

$$0, 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n-1,$$

pris $k-1$ à $k-1$.

Quant au coefficient de A, c'est un produit de facteurs de la forme

$$f\left(\alpha - \frac{l}{n}2\omega + \frac{h}{n}2\omega\right),$$

où h prend successivement les valeurs écrites précédemment.

D'après cela, ρ peut s'écrire simplement

$$\rho = \sum f\left(\alpha - \frac{h_1}{n}2\omega\right) f\left(\alpha - \frac{h_2}{n}2\omega\right)\dots f\left(\alpha - \frac{h_{k-1}}{n}2\omega\right)$$
$$- A_k f\left(\alpha - \frac{2\omega}{n}\right) f\left(\alpha - \frac{4\omega}{n}\dots f\left(\alpha - \frac{n-1}{n}2\omega\right)\right.$$
$$(h_1, \quad h_2, \quad \dots, \quad h_{k-1} = 1, 2, \dots, n-1).$$

Jusqu'ici la constante A a été laissée arbitraire ; si l'on donne à cette constante la valeur

$$(3) \qquad A_k = \frac{\sum f\left(\alpha - \frac{h_1}{n}2\omega\right)\dots f\left(\alpha - \frac{h_{k-1}}{n}2\omega\right)}{f\left(\alpha - \frac{2\omega}{n}\right)\dots f\left(\alpha - \frac{n-1}{n}2\omega\right)},$$

le résidu ρ sera nul. Comme l ne figure pas dans l'expression (3), la fonction V, pour cette même valeur de A, aura un résidu nul en chacun des pôles

$$\alpha, \ \alpha - \frac{2\omega}{n}, \quad \dots, \quad \alpha - \frac{n-1}{n}2\omega.$$

Je dis que le résidu de V sera nul aussi en chacun des pôles

$$\beta, \ \beta - \frac{2\omega}{n}, \quad \dots, \quad \beta - \frac{n-1}{n}2\omega.$$

En effet, pour annuler le résidu en chacun des pôles correspondants, il faut donner à A la valeur

$$(4)\qquad \frac{\sum f\left(\beta - \frac{h'_1}{n}2\omega\right)\cdots f\left(\beta - \frac{h'_{k-1}}{n}2\omega\right)}{f\left(\beta - \frac{2\omega}{n}\right)\cdots f\left(\beta - \frac{n-1}{n}2\omega\right)},$$
$$(h'_1,\ h'_2,\ \ldots,\ h'_{k-1} = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Or, cette valeur est identique à la précédente. En effet, il entre dans les expressions (3) et (4) un même nombre d'éléments que l'on peut se faire correspondre deux à deux par les formules

$$h'_1 = n - h_1,\quad \ldots,\quad h'_{k-1} = n - h_{k-1},$$

et l'on a

$$f\left(\alpha - h\frac{2\omega}{n}\right) = f\left[\beta - (n-h)\frac{2\omega}{n}\right],$$

puisque les arguments qui figurent dans le premier et dans le second membre ont pour somme, à une période près, $\alpha + \beta$, somme des pôles de la fonction f.

En résumé, si l'on donne à A_k la valeur (3) identique, à la valeur (4), la fonction elliptique V a tous ses résidus nuls. *Elle se réduit à une constante* B_k, et l'on a

$$P_k = A_k t_0 t_1 \ldots t_{n-1} + B_k.$$

L'équation qui a pour racines $t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n-1}$ est donc de la forme

$$\theta^n + (A_1\lambda + B_1)\theta^{n-1} + (A_2\lambda + B_2)\theta^{n-2} + \ldots + (A_{n-1}\lambda + B_{n-1})\theta + \lambda = 0.$$

On voit qu'elle est bien de la forme (2).

Pour compléter la démonstration, il faut examiner le cas, exclu jusqu'ici, où les $2n$ pôles

$$\alpha,\quad \alpha - \frac{2\omega}{n},\quad \ldots,\quad \alpha - \frac{n-1}{n}2\omega,$$
$$\beta,\quad \beta - \frac{2\omega}{n},\quad \ldots,\quad \beta - \frac{n-1}{n}2\omega,$$

ne seraient pas tous distincts.

On fera rentrer immédiatement ce cas dans le précédent en substituant à la fonction f une fonction du second ordre φ, aux mêmes périodes que f, dont les pôles α' et β' satisfont à la relation

$$\alpha' + \beta' = \alpha + \beta,$$

et sont choisis, ce qui est évidemment possible, de manière que les quantités

$$\alpha', \quad \alpha' - \frac{2\omega}{n}, \quad \ldots, \quad \alpha' - \frac{n-1}{n} 2\omega,$$

$$\beta', \quad \beta' - \frac{2\omega}{n}, \quad \ldots, \quad \beta' - \frac{n-1}{n} 2\omega$$

soient toutes distinctes entre elles.

Le raisonnement précédent peut alors s'appliquer : les n fonctions

$$\varphi(z), \quad \varphi\left(z + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \ldots, \quad \varphi\left(z + \frac{n-1}{n} 2\omega\right)$$

sont racines d'une équation de la forme.

$$P(\theta') + \lambda Q(\theta') = 0.$$

D'autre part, les fonctions du second ordre f et φ, ayant même somme de pôles, sont reliées, comme on sait, par une relation homographique.

On obtiendra donc l'équation en θ en opérant une substitution homographique sur l'équation précédente, et il est clair que cette nouvelle équation contiendra encore linéairement λ.

Le théorème énoncé est ainsi démontré dans tous les cas.

II.

Ce théorème est susceptible d'applications géométriques et nous allons en donner une.

Considérons deux coniques C et C′ telles qu'il existe un polygone de n côtés inscrit à la première et circonscrit à la seconde. On sait, d'après le théorème de Poncelet, qu'il existe alors une infinité de polygones de n côtés jouissant de la même propriété.

Proposons-nous de chercher le lieu des centres des moyennes distances des sommets d'un tel polygone, quand il varie de manière à rester inscrit à C et circonscrit à C′.

Nous rapporterons à cet effet la conique C à ses asymptotes. Soit

$$xy = 1$$

son équation. Les coordonnées de l'un quelconque de ses points peuvent être représentées par les formules

$$x = t, \qquad y = \frac{1}{t}.$$

Cela posé, on peut, comme on sait, former une fonction elliptique du second ordre $f(z)$, telle que les valeurs du paramètre t, définies par les égalités

$$t_0 = f(z), \qquad t_1 = f\left(z + \frac{2\omega}{n}\right), \qquad \ldots, \qquad t_{n-1} = f\left(z + \frac{n-1}{n} 2\omega\right)$$

correspondent constamment, lorsque z varie, aux n sommets du polygone considéré, quand il se déforme dans les conditions prescrites. La fonction $f(z)$ dépend naturellement de la conique C'.

Les paramètres $t_0, \ldots, t_{n-1}$, correspondant aux sommets du polygone, sont donc racines d'une équation de la forme

$$P(\theta) + \lambda Q(\theta) = 0.$$

Soient alors $(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ les coordonnées des sommets de notre polygone, (x, y) celles du centre des moyennes distances de ses sommets. On a

$$nx = x_0 + \ldots + x_{n-1} = t_0 + \ldots + t_{n-1},$$

$$ny = y_0 + \ldots + y_{n-1} = \frac{1}{t_0} + \ldots + \frac{1}{t_{n-1}} = \frac{t_1 t_2 \ldots t_{n-1} + \ldots}{t_0 t_1 \ldots t_{n-1}};$$

mais, en posant

$$t_0 t_1 \ldots t_{n-1} = \lambda,$$

on a

$$t_0 + \ldots + t_{n-1} = a\lambda + b,$$

$$t_1 t_2 \ldots t_{n-1} + \ldots = c\lambda + d.$$

Le lieu cherché s'obtiendra donc en éliminant λ entre les deux équations

$$nx = a\lambda + b,$$

$$ny = \frac{c\lambda + d}{\lambda}.$$

Le résultat est de la forme

$$Axy + Bx + Cy + D = 0.$$

Ainsi le lieu cherché est une conique homothétique à la conique circonscrite C, *quelle que soit la conique* C′.

En particulier, si la conique C est un cercle, il en est de même du lieu cherché (1).

(1) Ce théorème de Géométrie est connu dans le cas où la conique C et la conique C′ sont des cercles. Mais nous ne savons s'il a été énoncé dans le cas général.