P. APPELL

Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la Poinsot

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 98-102
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__98_1>

INTERPRÉTATION DE LA PÉRIODE IMAGINAIRE DANS UN MOUVEMENT A LA POINSOT;

Par M. P. Appell.

Dans la solution analytique donnée par Jacobi pour le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe quand il n'y a pas de forces accélératrices, les composantes de la rotation instantanée et les neuf cosinus s'expriment par des fonctions doublement périodiques du temps de première ou de deuxième espèce.

La période imaginaire de ces fonctions reste sans signification dans le mouvement. On ne peut pas chercher une signification de cette période en appliquant le théorème général que j'ai donné dans les *Comptes rendus* du 30 décembre 1878, à cause de l'absence de forces accélératrices.

Je me propose de montrer qu'on peut, par un choix convenable des conditions initiales, associer les mouvements du solide deux à deux, de telle façon que la période réelle de l'un soit égale à la période imaginaire de l'autre divisée par i.

En prenant comme axes mobiles liés au corps les axes principaux d'inertie relatifs au point fixe, et employant les notations classiques, on a les deux intégrales

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &Ap^2+Bq^2+Cr^2=D\mu^2,\\ &A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=D^2\mu^2,\end{aligned}\right.$$

D et μ désignant des constantes arbitraires.

Dans la représentation du mouvement donnée par Poinsot, la polhodie a pour équations

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D, \end{cases}$$

et le cône, lieu des axes instantanés dans le corps, a pour équation

$$(3) \qquad A(A-D)x^2 + B(B-D)y^2 + C(C-D)z^2 = 0.$$

Nous supposerons

$$A > B > C.$$

On sait qu'il existe deux sortes de polhodies : les unes, tournant autour des sommets du grand axe de l'ellipsoïde d'inertie (Oz), correspondent à

$$B > D > C;$$

les autres, entourant les sommets du petit axe (Ox), correspondent à

$$B < D < A.$$

Ces deux sortes de polhodies sont séparées par une polhodie singulière correspondant à $D = B$ et formée de deux ellipses passant par les sommets de l'axe moyen.

Nous allons voir que, dans chacune de ces catégories, les polhodies sont conjuguées deux à deux, de telle façon que, dans les mouvements correspondants, la période réelle d'un des mouvements est égale à la période imaginaire de l'autre divisée par i.

Prenons, pour fixer les idées, une polhodie de la première catégorie

$$B > D > C.$$

Les fonctions elliptiques du temps, qui donnent p, q, r, ont pour module

$$k^2 = \frac{A-B}{B-C}\,\frac{D-C}{A-D},$$

et, pour multiplicateur,

$$n = \mu\sqrt{\frac{D(A-D)(B-C)}{ABC}}.$$

(*Voyez*, par exemple, mon *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, Chap. XX.)

Nous associerons à ce mouvement un deuxième mouvement dans lequel les constantes arbitraires D et μ prennent de nouvelles valeurs D' et μ' choisies de telle façon que le nouveau module k'^2 soit complémentaire de k^2 et le nouveau multiplicateur n' égal à n. On a ainsi les deux conditions

$$\frac{A-B}{B-C}\frac{D-C}{A-D}+\frac{A-B}{B-C}\frac{D'-C}{A-D'}=1, \tag{4}$$

$$\mu\sqrt{D(A-D)}=\mu'\sqrt{D'(A-D')}. \tag{5}$$

La première de ces relations est une involution entre D et D' : quand D est choisi entre B et C, elle détermine une valeur de D' également située entre B et C. La deuxième relation détermine ensuite μ'. Les deux mouvements ainsi obtenus possèdent la propriété indiquée.

Voici comment on peut déterminer les conditions initiales conduisant à ces deux mouvements associés. Regardons comme instant initial l'instant où la rotation instantanée est dans le plan yOz contenant le grand axe et l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie. Alors, dans le premier mouvement, on a

$$p_0=0,$$

et l'axe instantané de rotation initial OI, qui est toujours sur le cône (3), est une des génératrices de ce cône située dans le plan des zy, c'est-à-dire l'une des deux droites

$$x=0, \qquad B(B-D)y^2+C(C-D)z^2=0;$$

les coefficients angulaires de ces deux droites, par rapport à Oy, sont donnés par

$$m^2=\frac{B(B-D)}{C(D-C)}.$$

De même, dans le deuxième mouvement, au moment où l'axe instantané OI' est dans le plan des yz, il coïncide avec une des deux droites ayant pour coefficients angulaires

$$m'^2 = \frac{B(B - D')}{C(D' - C)}.$$

En tirant de ces deux relations D et D', en fonction de m^2 et m'^2, et portant dans (4), on obtient la relation

$$m^2 m'^2 = \frac{B^2(A - B)^2}{C^2(A - C)^2},$$

d'où, en prenant pour OI et OI' les droites situées dans l'angle positif yOz,

$$(6) \qquad mm' = \frac{B(A - B)}{C(A - C)}.$$

Quant aux vitesses angulaires initiales ω_0 et ω'_0 des rotations autour des deux droites OI et OI' que nous venons de définir, on les détermine par la condition

$$\mu\sqrt{D(A - D)} = \mu'\sqrt{D'(A - D')}.$$

Les intégrales premières

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= D\mu^2, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= D^2\mu^2, \end{aligned}$$

donnent, par l'élimination de p,

$$B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 = D(A - D)\mu^2.$$

Pour le deuxième mouvement, on a, de même, en appelant p', q', r' les composantes de la rotation instantanée,

$$B(A - B)q'^2 + C(A - C)r'^2 = D'(A - D')\mu'^2.$$

Les seconds membres étant égaux, on a, dans ces deux mouvements,

$$(7) \qquad B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 = B(A - B)q'^2 + C(A - C)r'^2.$$

En particulier, à l'instant initial que nous avons choisi, les axes instantanés OI et OI' sont dans le plan zOy, p et p' sont nuls, et les rotations initiales doivent satisfaire à la relation (7).

Nous terminerons en donnant une interprétation géométrique simple de ces relations (6) et (7).

Les projections des polhodies sur le plan yOz sont des ellipses homothétiques et concentriques. Prenons, par exemple, la projection de la polhodie singulière, correspondant à $D = B$. Cette projection a pour équation

$$\text{(E)} \qquad B(A-B)y^2 + C(A-C)z^2 = (A-B);$$

c'est une ellipse dont les axes sont

$$a^2 = \frac{A-B}{B(A-B)}, \qquad b^2 = \frac{A-B}{C(A-C)},$$

avec

$$a^2 > b^2,$$

car l'inégalité

$$B(A-B) < C(A-C)$$

donne

$$A < B + C,$$

inégalité toujours remplie.

Construisons les diagonales OF et OF′ du rectangle des axes de cette ellipse

$$z = \pm \frac{b}{a} y.$$

1° *Les directions* OI *et* OI′ *des axes instantanés initiaux sont conjuguées harmoniques par rapport à l'angle* FOF′. (Relation 6.)

2° *Les intensités* ω_0 *et* ω'_0 *des rotations initiales correspondantes sont proportionnelles aux diamètres de l'ellipse* E *dirigés suivant* OI *et* OI′. (Relation 7.)

Les deux mouvements associés sont ainsi définis d'une manière simple.

On trouverait un résultat identique pour les polhodies de la deuxième catégorie, celles qui tournent autour des sommets du petit axe. Les conditions initiales associées se définiraient à l'aide de l'ellipse obtenue en projetant la polhodie singulière sur le plan des xy.