BULLETIN DE LA S. M. F.

H. VON KOCH

Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 215-227
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__215_1>

SUR LES FONCTIONS IMPLICITES DÉFINIES PAR UNE INFINITÉ D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES;

Par M. Helge von Koch.

Si les fonctions

$$\mathcal{F}_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont holomorphes dans le voisinage du point

$$(\mathcal{A}) \qquad t = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0,$$

si le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

ne s'annule pas à ce point, si les n équations

$$(\mathcal{B}) \qquad \mathcal{F}_i(t; x_1, x_2, \ldots. x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont toutes vérifiées pour les valeurs ($\mathcal{A}$), il existe un système (et un seul) de fonctions

$$x_1(t), \quad x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n(t),$$

satisfaisant aux équations ($\mathfrak{A}$), s'annulant au point $t = 0$, et holomorphes autour de ce point.

Ce théorème bien connu peut, dans des conditions assez générales, être étendu au cas où n est infiniment grand. C'est ce que je me propose de montrer dans la Note présente, en m'appuyant sur quelques définitions et remarques relatives aux fonctions analytiques d'une infinité de variables indépendantes qui se trouvent dans un travail précédent [1].

Soient donc

$$t; \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

des variables indépendantes en nombre illimité. Soient

$$\mathcal{F}_i(t; x_1, x_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty)$$

des fonctions analytiques de ces variables, holomorphes dans le voisinage du point

$$t = 0; \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots,$$

et s'annulant toutes à ce point. Écrivons les équations

$$(\mathfrak{S}) \qquad \mathcal{F}_i(t; x_1, x_2, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty).$$

En faisant sur les coefficients des $\mathcal{F}_i$ certaines hypothèses, nous verrons que le système infini ($\mathfrak{S}$) admettra une solution bien définie

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots,$$

holomorphe pour $t = 0$.

1. Supposons, en premier lieu, que le coefficient de x_i dans le développement de $\mathcal{F}_i$ soit égal à l'unité, et que chacun des autres coefficients soit inférieur, en valeur absolue, à un nombre po-

---

[1] *Sur les systèmes d'ordre infini d'équations différentielles* (*Oefversigt af K. Sv. Vet.-Ak. Förh.;* Stockholm, 1899).

sitif S_i. Supposons, de plus, que la série formée par les S_i

$$\sum_{i=1}^{+\infty} S_i$$

soit convergente. Les $\mathcal{F}_i$ sont donc de la forme

$$\mathcal{F}_i = x_i - \mathfrak{A}_i t - f_i(t; x_1, x_2, \ldots),$$

les f_i étant des séries de puissances ne renfermant que des puissances d'ordre supérieur à *un* par rapport aux variables, et les $\mathfrak{A}_i$ désignant des constantes assujetties aux conditions

$$|\mathfrak{A}_i| < S_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Formons la fonction

$$\Phi_i = \frac{S_i(t + \Sigma_k x_k)}{1 - (t + \Sigma_k x_k)} - S_i \Sigma_k x_k;$$

il est facile de voir que Φ_i est une fonction *majorante* pour $\mathfrak{A}_i t + f_i$, ce qui s'exprime en écrivant [1]

$$\mathfrak{A}_i t + f_i(t; x_1, x_2, \ldots) \ll \Phi_i(t; x_1, x_2, \ldots).$$

Pour étudier le système proposé d'équations

$$(1) \qquad x_i = \mathfrak{A}_i t + f_i(t; x_1, x_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty),$$

il convient de le comparer au système suivant

$$(2) \qquad \xi_i = \Phi_i(t; \xi_1, \xi_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Ce nouveau système est vérifié pour

$$(3) \qquad t = 0; \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \ldots,$$

et en posant

$$(4) \qquad \xi_i = \xi_i^{(1)} t + \xi_i^{(2)} t^2 + \ldots,$$

---

[1] Nous convenons d'employer la notation de M. Poincaré ($\ll$) et le nom de fonction *majorante* (Delassus, Thèses pour le doctorat; Paris, 1896), dans le même sens que pour les fonctions de n variables. *Cf.* mon Mémoire cité plus haut.

on voit facilement que les $\xi_i^{(\lambda)}$ sont des nombres positifs bien déterminés.

En effet, Φ_i étant (sauf pour le terme $S_i t$) de degré supérieur à l'unité par rapport aux variables, on pourra écrire

$$\xi_i^{(1)} = S_i,$$
$$\xi_i^{(\lambda)} = [\Phi_i(t;\, \xi_{1.\lambda-1}, \xi_{2.\lambda-1}, \ldots)]_\lambda,$$

$\xi_i^{(\nu)}$ désignant ce que devient le second membre de (4) quand on y annule tous les termes d'ordre supérieur à ν par rapport à t; le crochet avec l'indice λ autour de Φ_i désigne, selon l'usage, le coefficient de la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ de t dans le développement de la fonction.

Comme les Φ_i sont liées par les relations

$$\Phi_i = \frac{S_i}{S_1}\Phi_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, +\infty), \tag{5}$$

les équations (2) peuvent être remplacées par les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \xi_i &= \frac{S_i}{S_1}\xi_1, \\ \xi_1 &= \frac{S_1(t + H\xi_1)}{1-(t+H\xi_1)} - S_1 H \xi_1, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

H désignant la constante positive

$$H = \frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{+\infty} S_k.$$

La dernière des équations (6) nous montre que ξ_1 est holomorphe pour

$$|t| < \rho, \tag{7}$$

ρ étant suffisamment petit; donc tous les ξ_i sont holomorphes, et leurs développements (4) convergent absolument dans le domaine (7).

Retournons aux x_i définis par les équations (1). Posons

$$x_i = x_i^{(1)} t + x_i^{(2)} t^2 + \ldots; \tag{8}$$

nous aurons

$$x_i^{(1)} = \mathfrak{B}_i,$$
$$x_i^{(\lambda)} = [f_i(t;\, x_{1.\lambda-1}, x_{2.\lambda-1}, \ldots)]_\lambda,$$

$x_{i.\nu}$ désignant ce que devient x_i quand on y remplace tous ses termes, sauf les ν premiers, par zéro.

Il en résulte

$$(9) \qquad x_i \ll \xi_i \quad (\text{arg. } t),$$

ce qui prouve bien que la solution

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

du système (1), définie par le développement (8), est holomorphe dans le voisinage ρ du point $t = 0$.

Nous pouvons ajouter, en vertu des formules (6) et (9), que l'on a, en désignant par α une constante positive,

$$(10) \qquad |x_i| < \alpha S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, +\infty),$$

tant que

$$|t| \leqq \rho' \quad (\rho' < \rho).$$

2. Passons maintenant au cas où les $\mathfrak{F}_i$ sont de la forme plus générale

$$\mathfrak{F}_i = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathfrak{A}_{ik} x_k - \mathfrak{B}_i t - f_i(t;\, x_1, x_2, \ldots),$$

les $\mathfrak{A}_{ik}$ désignant des coefficients constants et les f_i ne contenant que des puissances d'ordre supérieur à *un* par rapport aux variables.

Considérons le cas le plus simple : celui où le déterminant infini des $\mathfrak{A}_{ik}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \ldots \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} & \ldots \\ . & . & \ldots \end{vmatrix}$$

est de forme normale [1].

---

[1] *Voir* un Mémoire *Sur les déterminants infinis, etc.* (*Acta mathematica*, t. XVI, p. 221).

Comme au numéro précédent, nous supposons de plus que $\mathfrak{B}_i$ et tous les coefficients figurant dans f_i soient inférieurs, en valeur absolue, à S_i, et enfin que la série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} S_i$$

soit convergente.

Je dis que l'étude du système donné que nous écrirons ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathfrak{A}_{ik} x_k = \mathfrak{B}_i t + f_i(t;\, x_1, x_2, \ldots), \tag{11}$$

se ramène au type étudié plus haut, pourvu que l'on suppose $\Delta \neq 0$.

En effet, désignons par α_{ik} le mineur de Δ adjoint à l'élément $\mathfrak{A}_{ik}$ (¹). Pourvu que les inconnues x_k soient assujetties à la condition

$$|x_k| < X, \tag{11'}$$

X étant fini, les équations (11) seront équivalentes aux suivantes (²)

$$x_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{+\infty} (\mathfrak{B}_i t + f_i)\, \alpha_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots, +\infty). \tag{12}$$

Or on sait (³) que

$$|\alpha_{ik}| < K\, \Sigma'_\lambda\, |\mathfrak{A}_{k\lambda}|,$$

K désignant une constante positive et l'apostrophe indiquant que la valeur $\lambda = k$ est exclue.

Donc, chacun des coefficients figurant dans la fonction

$$\theta_k(t;\, x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{+\infty} (\mathfrak{B}_i t + f_i)\, \alpha_{ik}$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 226.

(²) *Voir* mon Mémoire *Sur les intégrales regulières des équations différentielles linéaires,* n° 4 (*Acta mathematica,* t. XVIII), ou le Mémoire de M. CAZZANIGA, *Sui determinanti d'ordine infinito,* n° 14 (*Annali di Matematica,* 1897).

(³) Mémoire cité (*Acta mathematica,* t. XVI, p. 242).

sera inférieur, en valeur absolue, à la quantité suivante

$$\left|\frac{1}{\Delta}\right| \Sigma_i S_i |\alpha_{ik}| < \frac{K}{\Delta} \Sigma_i S_i \Sigma'_\lambda |\mathcal{A}_{k\lambda}|. \tag{13}$$

Or, le déterminant Δ étant de forme normale, la série

$$\Sigma_k \Sigma'_\lambda |\mathcal{A}_{k\lambda}|$$

est convergente. Donc, désignant par T_k le second membre de l'inégalité (13), on est assuré que tous les coefficients figurant dans θ_k, c'est-à-dire dans le second membre de (12), sont inférieurs, en valeur absolue, à T_k; les T_k formant une série convergente, nous nous trouvons donc ramené au cas étudié au n° 1. D'où ce résultat :

Le système (11, 11') *est vérifié par un système* (*et un seul*) *de fonctions*

$$x_1(t), \quad x_2(t), \quad \ldots \tag{14}$$

holomorphes dans le voisinage de $t = 0$ *et s'annulant à ce point.*

Nous savons de plus [formule (10)] que

$$|x_i(t)| < \alpha T_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty) \tag{15}$$

pour

$$|t| \leqq \rho',$$

ρ' désignant un nombre inférieur au rayon de convergence ρ des fonctions (14).

3. Le résultat que nous venons d'obtenir peut être généralisé dans diverses directions; ainsi, au lieu d'une seule variable t, on pourra introduire un nombre quelconque de variables indépendantes; cela n'amène aucune difficulté.

On pourra étudier aussi le cas où le déterminant Δ des $\mathcal{A}_{ik}$ s'annule. En effet, j'ai démontré [1] qu'on peut toujours trouver un sous-déterminant d'ordre fini qui ne s'annule pas.

---

[1] *Voir* Mémoire cité (*Acta mathematica*, t. XVI, p. 246).

Supposons, par exemple, que le sous-déterminant adjoint à l'élément $\mathcal{A}_{11}$ ne soit pas nul. Les équations

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}_{ik} x_k = \mathcal{B}_i t + f_i(t; x_1, x_2, \ldots) \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

nous permettent alors d'exprimer

$$x_2, \quad x_3, \quad \ldots$$

en fonctions holomorphes par rapport à t et à x_1; portant les valeurs ainsi obtenues dans l'équation

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}_{1k} x_k = \mathcal{B}_1 t + f_1(t; x_1, x_2, \ldots),$$

on aura une relation entre x_1 et t; si cette relation n'est pas vérifiée identiquement quand on y annule t, x_1 sera une fonction *algébroïde* de t [1] et, par conséquent, tous les x_k seront algébroïdes par rapport à t.

D'une manière tout analogue, on pourra traiter le cas où le déterminant Δ et tous ses mineurs jusqu'à un ordre quelconque s'annulent.

D'un autre côté, on peut se débarrasser de l'hypothèse que Δ doit être de forme normale : il suffit de supposer que Δ appartienne à la classe des déterminants de *genre fini* [2]. Et enfin, les hypothèses faites plus haut sur les autres coefficients figurant dans les équations proposées, peuvent être remplacées par des conditions moins serrées. Ce sont là des questions auxquelles j'espère pouvoir revenir bientôt.

Je terminerai en appliquant les résultats obtenus à un problème concernant les équations différentielles.

---

(1) POINCARÉ, Thèses pour le doctorat, p. 4 et suiv.; Paris, Gauthier-Villars, 1879.

(2) On trouve la définition et une étude de ces déterminants dans mon travail *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini* (*Bih. till K. Sv. Vet.-Ak. Handl.* Bd. XXII; Stockholm, 1896).

4. Pour avoir un exemple facile, je prendrai l'équation suivante

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mathfrak{P} y + t(\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1 y + \ldots + \mathfrak{Q}_m y^m) = 0, \tag{16}$$

t désignant un paramètre. Je suppose que $\mathfrak{P}$ et les $\mathfrak{Q}_i$ soient des fonctions périodiques de x de période 2π et, de plus, que ces fonctions soient holomorphes dans une bande parallèle à l'axe réel et embrassant cet axe. Il en résulte qu'on pourra développer ces fonctions en séries trigonométriques absolument convergentes

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} p_\nu e^{\nu x i}, \\ \mathfrak{Q}_p &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q_\nu^{(p)} e^{\nu x i} \qquad (p = 0, 1, \ldots, m). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Demandons-nous s'il existe, pour les petites valeurs du paramètre t, une solution périodique de l'équation (16) ([1]).

Posons

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda e^{\lambda x i},$$

et portons cette série dans l'équation proposée; nous trouverons que les g_λ doivent satisfaire aux équations suivantes

$$-\lambda^2 g_\lambda + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} p_{\lambda-s} g_s + t \mathcal{G}_\lambda = 0 \qquad (\lambda = -\infty, \ldots, +\infty), \tag{18}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{G}_\lambda = q_\lambda^{(0)} + \Sigma_s q_{\lambda-s}^{(1)} g_s + \sum_{s_1, s_2} q_{\lambda-s_1-s_2}^{(2)} g_{s_1} g_{s_2} + \ldots \\ + \sum_{s_1, \ldots, s_m} q_{\lambda-s_1-\ldots-s_m} g_{s_1} \ldots g_{s_m}, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

([1]) Il est évident que cette équation appartient à un des types généraux d'équations traitées par M. Poincaré (*Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*). Dans un travail suivant, consacré à une étude générale, je reviendrai au rapport entre la méthode de M. Poincaré et celle indiquée ici.

les indices de sommation s du second membre prenant, indépendamment les uns des autres, toutes les valeurs entières positives et négatives.

Si l'on pose

$$\mathcal{A}_{0k} = -p_{-k}, \qquad \mathcal{A}_{ik} = -\frac{p_{i-k}}{i^2}, \qquad \mathcal{A}_{ii} = 1 - \frac{p_0}{i^2},$$
$$f_i = t\frac{\mathcal{G}_i}{i^2},$$

le système (18) prendra la forme

$$\Sigma_k \mathcal{A}_{ik} g_k = f_i(t;\, g_1, g_2, \ldots) \qquad (i = -\infty, \ldots, +\infty). \tag{20}$$

Comme les séries (17) convergent absolument, tous les coefficients figurant dans $\mathcal{G}_i$ sont inférieurs, en valeur absolue, à un nombre positif; il en résulte qu'on pourra trouver une suite de nombres positifs

$$S_i \qquad (i = -\infty, \ldots, +\infty)$$

formant une série convergente et telle que chacun des coefficients dans f_i soit inférieur, en valeur absolue, à S_i.

De plus, en posant pour abréger

$$\mathcal{A}_{ii} = 1 + \mathcal{A}'_{ii}, \qquad \mathcal{A}_{ik} = \mathcal{A}'_{ik} \qquad (i \neq k),$$

on voit que la série double

$$\Sigma_i \Sigma_k |\mathcal{A}'_{ik}|$$

converge; donc le déterminant Δ des $\mathcal{A}_{ik}$ est de *forme normale*.

Le système d'équations (20) se ramène, par conséquent, au type étudié plus haut (n° 2), pourvu que Δ soit différent de zéro.

Or, dire que Δ n'est pas nul, c'est dire que l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathfrak{P}y = 0$$

n'a aucune solution périodique (sauf la solution évidente $y = 0$). Cette condition sera vérifiée si, par exemple, les coefficients

$$p_\nu \qquad (\nu = -\infty, \ldots, +\infty)$$

sont suffisamment petits. On a, en effet

$$|\Delta - 1| < \Pi_i(1 + \Sigma_k |\mathcal{A}'_{ik}|) - 1$$

$$< \sum_{i,k} |\mathcal{A}'_{ik}| + \frac{1}{\lfloor 2}\left(\sum_{i,k} |\mathcal{A}'_{ik}|\right)^2 + \ldots = e^{\sum\limits_{i,k} |\mathcal{A}'_{ik}|} - 1,$$

ce qui nous montre que Δ sera certainement différent de zéro si les p_ν satisfont à l'inégalité suivante

$$\sum_{i,k} |\mathcal{A}'_{ik}| < \log 2,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma_\nu |p_\nu| + 2\Sigma_\nu |p_\nu| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} < \log 2,$$

ou bien

$$\Sigma_\nu |p_\nu| < \frac{\log 2}{1 + \frac{\pi^2}{3}}.$$

Supposons donc $\Delta \neq 0$. D'après le résultat obtenu plus haut (n° 2), le système d'équations (20) sera satisfait par un système (et un seul) de fonctions

$$g_i = g_i(t) \qquad (i = -\infty, \ldots, +\infty),$$

holomorphes dans le voisinage de $t = 0$ et s'annulant pour $t = 0$.

De plus, nous savons que l'on a (formule 15)

$$|g_\lambda(t)| < T_\lambda \qquad \text{pour} \qquad |t| \leqq \rho',$$

ρ' étant suffisamment petit, et les T_λ étant des nombres positifs formant une série convergente.

Il en résulte que la série

$$g(x, t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t) e^{\lambda x i} \tag{21}$$

converge absolument pour toute valeur réelle de x et pour toute valeur de t du domaine

$$|t| \leqq \rho'.$$

Pour montrer que $g(x, t)$ est une fonction analytique de x, il faut remarquer d'abord que l'hypothèse faite sur les coefficients de l'équation proposée peut s'exprimer en disant que les séries de Laurent

$$\Sigma_\nu p_\nu u^\nu, \quad \Sigma_\nu q_\nu^{(\lambda)} u^\nu \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

convergent dans une couronne donnée

$$\mathfrak{R} < |u| < \mathfrak{R}', \qquad (\mathfrak{R} < 1 < \mathfrak{R}').$$

Soient r et r' deux nombres quelconques de l'intervalle $(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}')$ $(r < 1 < r')$, et soit ξ un nombre quelconque satisfaisant aux conditions

$$r \leqq \xi \leqq r'.$$

Multipliant l'équation $i^{\text{ième}}$ du système (20) par ξ^i et posant

$$g_\nu \xi^\nu = h_\nu,$$

on aura

$$(22) \qquad \Sigma_k \mathfrak{A}_{ik} \xi^{i-k} h_k = \mathfrak{F}_i(t; h_1, h_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty),$$

$\mathfrak{F}_i(t; h_1, h_2, \ldots)$ désignant ce que devient $f_i(t; h_1, h_2, \ldots)$ quand on y remplace les coefficients

$$p_\nu, \quad q_\nu^{(\lambda)} \qquad (\nu = -\infty, \ldots, +\infty)$$

par

$$p_\nu \xi^\nu, \quad q_\nu^{(\lambda)} \xi^\nu \qquad (\nu = -\infty, \ldots, +\infty).$$

respectivement.

Ces nouveaux coefficients étant, ainsi que les anciens, inférieurs en valeur absolue à un nombre fixe H, chaque coefficient de $\mathfrak{F}_i$ aura un module inférieur à

$$\frac{\mathrm{H}}{i^2}.$$

De plus, on constate facilement que le déterminant formé par les éléments

$$\mathfrak{A}_{ik} \xi^{i-k} \qquad (i, k = -\infty, \ldots, +\infty)$$

est de forme normale.

Les h_k satisfont donc à un système infini remplissant les mêmes conditions que celui auquel satisfont les g_k. Donc les h_k sont des fonctions de t holomorphes pour $t = 0$ et satisfaisant à des conditions de la forme

$$|h_k| < \mathfrak{V}_k \qquad \text{pour} \qquad |t| \leqq \rho'',$$

ρ'' étant suffisamment petit et la série $\Sigma_k \mathfrak{V}_k$ étant convergente.

Donc, prenant d'abord $\xi = r'$, puis $\xi = r$, nous aurons

$$|g_k| \, r'^k < \mathrm{K}, \qquad |g_{-k}| \, r^{-k} < \mathrm{K},$$

ce qui prouve que la série de Laurent

$$\Sigma_k g_k u^k$$

converge dans la couronne

$$r < |u| < r';$$

donc la série trigonométrique

$$g(x, t) = \Sigma_k g_k(t) e^{kxi},$$

converge uniformément tant que la partie imaginaire $\mathfrak{J}(x)$ de x reste dans un domaine intérieur au suivant

$$\text{(23)} \qquad \log \frac{1}{r'} < \mathfrak{J}(x) < \log \frac{1}{r},$$

ce qui prouve que la fonction $g(x, t)$ est une fonction analytique de x, holomorphe dans le domaine (23).

Comme on peut différentier terme pour terme la série (21), on voit que g est une solution de l'équation (16); c'est une solution périodique de période 2π de x qui, pour les petites valeurs de t, peut être développée selon les puissances positives de ce paramètre. On voit, en effet, que la série (21) converge uniformément par rapport à t dans le domaine $|t| \leqq \rho''$, pourvu seulement que x appartienne au domaine (23).