J. HADAMARD

Sur les conditions de décomposition des formes

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 34-47

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__34_1>

SUR LES CONDITIONS DE DÉCOMPOSITION DES FORMES;

Par M. Hadamard.

1. Parmi les différentes manières dont on peut former l'expression symbolique du résultant de deux équations, il en est une que l'on est conduit, ainsi que je l'ai fait voir dans un Mémoire précédent (¹), à considérer en particulier. La possibilité de cette formation repose sur l'existence d'un invariant R, commun à une forme tangentielle à h variables

$$F = u_\alpha^m, \tag{1}$$

et à une forme ponctuelle au même nombre de variables

$$\Phi = b_x^n, \tag{2}$$

invariant caractérisé par les propriétés suivantes :

1° Lorsque F est décomposable en facteurs linéaires

$$F = \prod_{i=1}^{m} (u_1 \xi_1^{(i)} + u_2 \xi_2^{(i)} + \ldots + u_h \xi_h^{(i)}),$$

(¹) *Acta mathematica*, t. XX, p. 207; 1896.

R représente le produit des résultats de substitution des systèmes des ξ dans la forme Φ :

$$R = \prod_i \Phi(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots, \xi_h^{(i)});$$

2° Lorsque Φ est décomposable en facteurs linéaires

$$\Phi = \prod_{k=1}^{n} (g_1^{(k)} x_1 + \ldots + g_h^{(k)} x_h),$$

R représente de même (quel que soit F) le produit des résultats de substitution des systèmes des g dans la forme F;

3° La forme symbolique de R ne dépend pas du nombre h des variables : on peut (et l'on doit) supposer que, pour calculer cette quantité à l'aide des conditions 1° et 2°, on a donné au nombre h une valeur h_0 assez grande pour que l'expression obtenue vérifie ces même conditions pour toute autre valeur de h.

La connaissance de l'expression R, pour les différentes valeurs de m et de n, permettrait d'écrire directement, sous sa forme symbolique, le résultant d'un nombre quelconque h de polynômes homogènes à h variables.

L'expression R est-elle unique? Pour répondre à cette question, remarquons que deux quantités qui satisfont l'une et l'autre aux conditions (1°) et (2°) ne peuvent différer entre elles que par une expression qui s'annule, quel que soit Φ, si F est un produit de facteurs linéaires et, quel que soit F, si Φ est un tel produit. Comme R est de degré n par rapport aux coefficients de F et de degré m par rapport aux coefficients de Φ, nous voyons que la différence en question serait forcément nulle si l'on pouvait énoncer la proposition suivante : *du système des conditions qui expriment qu'une forme de degré n est décomposable en facteurs linéaires, on n'en peut déduire aucune qui soit de degré inférieur à* $n+1$.

MM. Gordan [1] et Brill [2] ont, dans ces dernières années, obtenu les conditions nécessaires et suffisantes de décomposition d'une

(1) *Mathematische Annalen*, t. XLV, p. 413.

(2) *Math. Ann.*, t. L, 2e Cahier, p. 157; 1898.

forme ternaire (et, par suite, d'une forme à un nombre quelconque de variables) de degré n : autrement dit, en considérant les coefficients de la forme comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace $E_{\frac{n(n+3)}{2}}$, ils ont formé les équations de la multiplicité algébrique M_{2n} à $2n$ dimensions, formée par les points correspondant à des formes qui sont des produits de facteurs linéaires. Les conditions auxquelles ils sont parvenus sont toutes de degré au moins égal à $n+1$, conformément à l'énoncé précédent. Seulement il n'est pas démontré que ce degré soit le plus petit possible; cette conclusion ne semble même pas pouvoir se tirer aisément du résultat que nous venons de rappeler. Autre chose, en effet, est de former les équations de la multiplicité M_{2n}, autre chose de trouver les surfaces du plus petit degré possible qui la contiennent. La difficulté d'une pareille démonstration donnera peut-être quelque valeur aux simples indications que je me propose de fournir, à cet égard, dans ce qui va suivre.

2. Lorsque n est égal à 2 ou à 3, non seulement l'examen des conditions de décomposition permet de vérifier que le fait précédemment énoncé est exact [1]; mais, même si l'on ne connaissait pas ces conditions, on pourrait, sans les former, démontrer *a priori* qu'elles jouissent de la propriété indiquée.

Prenant d'abord le cas de $n = 2$, je dis que, si une fonction F des coefficients d'une conique a son degré au plus égal à 2 et qu'elle s'annule toutes les fois que la conique se décompose en deux droites, elle est identiquement nulle. Il suffit, pour le démontrer, de remarquer qu'en substituant dans la fonction F les coefficients du polynome $f + \lambda\varphi$ (où λ est un paramètre arbitraire), on obtiendrait un polynome du second degré en λ, lequel s'annulerait pour trois valeurs différentes de cette quantité; ceci ne peut se faire que si $F = 0$ est une identité par rapport à λ, ce qui donne la conclusion annoncée, puisque f désigne n'importe quelle forme quadratique ternaire.

De même, dans le cas de $n = 3$, nous démontrerons qu'une fonction F des coefficients de la forme qui s'annule toutes les fois que celle-ci est décomposable, et n'est cependant pas identique-

(1) Encore la chose est-elle loin d'être immédiate pour $n = 3$.

ment nulle, a son degré au moins égal à 4, en constituant, avec la forme considérée f et sa hessienne H, un faisceau $f + \lambda H$. Les coefficients de la forme générale du faisceau, substitués dans l'expression F, la transforment en un polynôme en λ qui s'annule pour quatre valeurs de λ (celles pour lesquelles $f + \lambda H$ se décompose en trois droites) sans être nul pour $\lambda = 0$ (puisque f est une forme quelconque).

3. Pour transporter directement la méthode précédente aux valeurs supérieures de n, il faudrait former des faisceaux linéaires composés de courbes de degré n, et contenant $n + 1$ courbes décomposables; autrement dit, trouver $n + 1$ systèmes de n droites. Mais il est aisé de voir que de tels faisceaux ne peuvent jamais exister pour $n > 3$, en dehors, bien entendu, du cas où la courbe générale du faisceau est réductible, ce qui a lieu : 1° lorsque les $n + 1$ systèmes ont une droite commune; 2° lorsque les n^2 points d'intersection (points-bases du faisceau) sont tous confondus en un seul.

Soient, en effet,

$$S_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

les $n + 1$ systèmes de droites dont nous admettons pour un instant l'existence.

En premier lieu, peut-il arriver que les n^2 points-bases ne soient pas tous distincts?

Supposons que par une intersection multiple A passent p droites du système S_0 et q droites du système S_1 : l'ordre de multiplicité de l'intersection A sera exactement pq, puisque deux droites de systèmes différents ne peuvent coïncider. On en déduit que p doit être égal à q, car si r est le nombre analogue relatif à un troisième système S_2, l'ordre de multiplicité de l'intersection A doit avoir, d'une part la valeur rp, d'autre part la valeur rq : cet ordre de multiplicité est donc égal à p^2.

Chacun des systèmes S_i comprend p droites D (distinctes ou non) issues de A et $n - p$ droites D' ne passant pas en ce point.

Les p droites du système S_i sont coupées par les $n - p$ droites D' de l'un quelconque des autres systèmes en des points au nombre de $p(n - p)$ ou comptant pour $p(n - p)$. En appliquant cette évaluation pour toutes les valeurs de i et ajoutant les intersections confondues en A, il vient un total d'au moins

$$(n+1)p(n-p)+p^2=pn(n+1-p).$$

Or ce nombre, égal à n^2 lorsque p est égal à 1 ou lorsque p est égal à n (hypothèse exclue précédemment), est plus grand que n^2 pour toutes les valeurs intermédiaires de p. Donc tous les points communs doivent être distincts.

Soient alors (puisque $n>3$) D_1, D_2, D_3 trois droites, forcément distinctes, du système S_0; par l'un des points-bases situés sur D_3 passent, outre D_3, n droites de nos systèmes, lesquelles coupent D_1 en les n points-bases situés sur cette droite, et de même pour D_2. Si nous opérons de même avec un second point-base pris sur D_3, nous voyons que les points de D_1 sont en perspective de deux manières différentes avec ceux de D_2. Soient P, P′ les points de D_1 qui sont ainsi successivement en perspective avec le même point de D_2; nous voyons tout d'abord : 1° que les points P, P′ sont nécessairement différents; 2° que la relation entre ces points est homographique. Les points doubles de cette homographie sont les points A, B où D_1 est coupé par D_2 et D_3. De même qu'au point P correspond le point P′, à celui-ci correspond un point P″, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on revienne à P. Il en résulte que les points doubles de l'homographie ne peuvent être confondus : autrement dit, les trois droites D_1, D_2, D_3 ne peuvent passer par un même point; on aura, d'ailleurs,

$$\frac{P'A}{P'B}=\alpha\frac{PA}{PB}, \tag{3}$$

α étant un nombre qui est forcément une racine de l'unité.

Tous les points-bases situés sur D_1 étant distribués en cycles analogues, on a évidemment

$$\frac{PA}{PB}+\frac{P'A}{P'B}+\ldots=0.$$

Cette équation détermine le point B lorsqu'on suppose connus A, P, P′, . . ., le point B étant *le centre des moyennes harmoniques* des points P, P′, ... relativement à A. Si donc D_4 est une quatrième droite du système S_0, elle ne pourrait couper D_1 qu'en B, ce que nous avons vu être impossible.

Ainsi, dès que n dépasse 3, nous ne pouvons songer à généraliser directement le raisonnement qui a servi pour $n = 3$. Il y aurait donc lieu d'essayer l'emploi de raisonnements analogues, mais plus compliqués, consistant, par exemple, à partir d'un système linéaire à deux paramètres

$$f + \lambda\varphi + \mu\psi,$$

en établissant entre λ et μ une relation de degré p. Le théorème serait démontré si, pour plus de np systèmes de valeurs de λ et de μ, on trouvait une forme $f + \lambda\varphi + \mu\psi$ décomposables en facteurs linéaires.

4. Nous ne rechercherons pas les résultats que l'on pourrait obtenir dans cette voie et nous nous contenterons de remarquer qu'il existe des faisceaux de la forme $f + \lambda\varphi$, tels que le polynôme $f + \lambda\varphi$, irréductible pour λ arbitraire, renferme pour $n + 1$ valeurs de λ *un* facteur linéaire.

En effet, $n + 1$ droites $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ se coupent en $\frac{n(n+1)}{2}$ points; par ceux-ci et $n - 1$ points arbitraires Q du plan passe un faisceau linéaire de courbes C_n qui coupent toutes chacune des droites données en n points fixes; celles-ci entrent donc chacune en facteur dans l'une des courbes du faisceau.

Les $n\frac{n+3}{2} - 1$ points choisis comme nous venons de le dire sont (du moins si les droites P et les points Q ont été pris arbitrairement) indépendants les uns des autres relativement à la détermination d'une C_n, et celle-ci sera, en général, irréductible, et même sans point double. Son équation sera

$$(4) \qquad P_1 P_2 \ldots P_{n+1}\left(\frac{a_1}{P_1} + \frac{a_2}{P_2} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{P_{n+1}}\right) = 0,$$

où $a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres, $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ étant les droites données.

Par conséquent, les points doubles de cette C_n ne seront autres que les C_{n-1} avec la dernière droite, lesquels ne coïncideront pas avec les points doubles analogues de la courbe C_n qui contient une autre des droites données en facteur.

Le même raisonnement s'applique aux surfaces de l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Par exemple, dans l'espace ordinaire, on prendra $n+1$ plans quelconques qui se coupent suivant $n\frac{n+1}{2}$ droites; par celles-ci passent assurément une infinité de surfaces S_n de degrés n. Parmi cet ensemble on choisira un faisceau linéaire quelconque; $n+1$ surfaces du faisceau ainsi constitué comprendront respectivement les $n+1$ plans donnés. D'ailleurs, la surface générale sera irréductible et même sans lignes doubles.

Il resterait à rechercher le degré de généralité de ces C_n ou S_n. Une cubique plane générale est circonscrite à quatre séries de quadrilatères complets, chaque série dépendant de deux paramètres, de manière qu'un côté du quadrilatère puisse être pris arbitrairement. Mais, dès les quartiques, la proposition analogue cesse d'être vraie [1]. D'ailleurs, dans l'espace, les surfaces représentées par l'équation (4) sont évidemment loin d'être les plus générales de leur degré. Leurs coefficients satisfont à certaines équations de condition $\mathfrak{S}$ dont il faudrait rechercher le degré minimum.

Un cas intéressant est celui d'une hypersurface S_n, de degré n dans l'espace E_n à n dimensions. Dans un tel espace, on peut toujours regarder l'équation (4) comme représentant la polaire du système des $n+1$ hyperplans P_1, P_2, ..., P_{n+1} par rapport à un point convenablement choisi O de E_n (le point $P_1 : a_1 = P_2 : a_2 = \ldots = P_{n+1} : a_{n+1}$). Alors, si la proposition énoncée au n° 1 est exacte, *aucune des conditions* $\mathfrak{S}$ *ne peut être de degré inférieur à* $n+2$. Une telle condition pourrait être, en effet, considérée comme imposée à la polaire, par rapport au point O, d'une surface S_{n+1} de degré $n+1$; elle serait toujours vérifiée lorsque S_{n+1} se réduirait à un système de plans et n'aurait cependant pas lieu identiquement, puisqu'elle ne serait pas une identité par rapport aux coefficients de S_n et qu'une S_n quelconque est la polaire d'une S_{n+1} par rapport au point O.

Mais il y a plus. Supposons établi l'énoncé suivant : *Si une fonction* F *des coefficients d'une forme de degré n a son ordre inférieur à* $n+1$ *et s'annule toutes les fois que la forme est*

(1) Lüroth, *Math. Ann.*, t. XIII; 1878.

décomposable en facteurs linéaires, elle s'annule aussi toutes les fois que cette forme contient un *facteur linéaire.* Si nous admettons ce fait pour tous les degrés, le théorème dont nous nous occupons peut être considéré comme démontré.

En effet, la quantité F supposée nulle toutes les fois que la forme donnée S_n est un produit de facteurs linéaires $P_1, P_2, \ldots, P_n$, sera alors nulle, d'après ce que nous venons de voir, toutes les fois que S_n sera de la forme $P_1 P_2 \ldots P_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{P_i}$ et, par conséquent, toutes les fois que S_n dérivera, par formation polaire, d'une forme S_{n+1} de degré $n+1$ décomposable en facteurs linéaires. Mais nous pouvons appliquer à nouveau le même principe et remarquer que $F = 0$ peut être considéré comme condition, de degré moindre que $n+2$, imposée aux coefficients de S_{n+1} : cette condition est donc encore vérifiée lorsque S_{n+1} dérivera, par formation polaire, d'une S_{n+2} entièrement décomposable, c'est-à-dire lorsque S_n dérivera d'une telle S_{n+2} par deux formations polaires successives. On continuera ainsi jusqu'à un degré assez élevé pour qu'une forme décomposable de ce degré puisse donner, par formations polaires convenablement choisies, une S_n quelconque, et l'on sera ainsi arrivé à la conclusion demandée.

5. Au lieu d'écrire directement, par l'équation (4), les courbes (ou surfaces) circonscrites à des polygones (ou polyèdres) complets, on peut obtenir leurs équations sous forme symbolique, en généralisant un résultat publié en 1877 par M. Tannery (¹).

Partant de la considération de deux formes cubiques binaires

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} G &= g_0 X_1^3 + 3g_1 X_1^2 X_2 + 3g_2 X_1 X_2^2 + g_3 X_2^3, \\ G' &= g'_0 X_1^3 + 3g'_1 X_1^2 X_2 + 3g'_2 X_1 X_2^2 + g'_3 X_2^3, \end{aligned} \right.$$

M. Tannery étudie l'équation de quatrième degré en λ qui exprime que $G + \lambda G'$ a un facteur double, et se propose de décomposer son discriminant en deux facteurs, l'un de ces facteurs étant le résultant de G et de G'. Le second facteur n'est autre que le discrimi-

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. I, p. 260-264.

nant Δ de la forme quadratique ternaire (aux variables x_1, x_2, x_3)

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &(g_0g'_1 - g_1g'_2)x_1^2 + (g_1g'_2 - g_2g'_1)x_2^2 \\ &\quad + (g_2g'_3 - g_3g'_2)x_3^2 + (g_1g'_3 - g_3g'_1)x_2x_3 \\ &\quad + (g_0g'_3 - g'_0g_3 - g_1g'_2 + g_2g'_1)x_3x_1 + (g_0g'_2 - g_2g'_0)x_1x_2. \end{aligned} \right.$$

Or, il est aisé d'interpréter la condition $\Delta = 0$. Il est clair, en effet, qu'une racine de l'équation en λ sera nécessairement multiple lorsque la forme $G + \lambda G'$ correspondante admettra un facteur triple, et c'est, par conséquent, cette circonstance qui correspond à $\Delta = 0$.

Dès lors, il est aisé de comprendre comment Δ se présente comme discriminant de la forme ternaire (6). Celle-ci, en effet, est, d'une part, un combinant du réseau $G + \lambda G'$, et, d'autre part, si G et G' sont pris sous forme symbolique

$$G = g_x^3, \qquad G' = g'^3_x,$$

elle s'écrit

$$(7)\qquad (gg')(g_1^2x_1 + g_1g_2x_2 + g_2^2x_3)(g'^2_1x_1 + g'_1g'_2x_2 + g'^2_2x_3).$$

Sous cette forme, il est évident que, si G est un cube parfait, l'expression (6) contient un facteur linéaire, puisque alors le facteur symbolique $g_1^2x_1 + g_1g_2x_2 + g_2^2x_3$ devient effectif.

Donc aussi la forme (7) se décomposera, si le faisceau $G + \lambda G'$ contient un cube parfait; nous retrouvons donc ainsi la conclusion obtenue plus haut.

Le raisonnement précédent se généralise de lui-même; soient n formes binaires de degré $n + 1$

$$(8)\qquad G = g^{n+1}x, \qquad G' = g'^{n+1}x, \qquad G'' = g''^{n+1}x, \qquad \ldots;$$

le produit symbolique

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3) = (gg')(g'g'')\ldots(g_1^2x_1 + g_1g_2x_2 + g_2^2x_3) \\ \times (g'^2_1x_1 + g'_1g'_2x_2 + g'^2_2x_3)\ldots \end{aligned} \right.$$

est un combinant du réseau

$$(10)\qquad \lambda G + \lambda' G' + \lambda'' G'' + \ldots.$$

Il contient un facteur linéaire dès que l'une des formes (8) *est une puissance $n + 1^{\text{ième}}$ exacte, et, par conséquent aussi, dès que le réseau* (10) *contient une telle puissance.*

Remplaçons maintenant G par $G + \mu H$, H étant une nouvelle forme analogue à G et μ un paramètre. Φ sera remplacé par $\Phi + \mu\Psi$ (en désignant par Ψ ce que devient Φ lorsque l'on change G en H); et les valeurs de μ, telles que la quantité $\Phi + \mu\Psi$ contienne un facteur linéaire, s'obtiendront en écrivant que

$$\lambda(G + \mu H) + \lambda' G' + \lambda'' G'' + \ldots$$

est de la forme

$$(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)^{n+1}.$$

Or, ceci arrive de $n + 1$ manières, car il n'existe qu'une relation linéaire commune aux coefficients des $n + 1$ formes H, G, G', G'', ...; autrement dit, il n'existe qu'une forme aux variables contrevariantes u_1, u_2,

$$\alpha_0 u_1^{n+1} + (n+1)\alpha_1 u_1^n u_2 + \ldots + \alpha_{n+1} u_2^{n+1}, \tag{11}$$

qui soit *apolaire* à la fois aux $n + 1$ premières; l'équation

$$\alpha_0 \gamma_1^{n+1} + (n+1)\alpha_1 \gamma_1^n \gamma_2 + \ldots + \alpha_{n+1} \gamma_2^{n+1} = 0$$

déterminera $n + 1$ valeurs de $\gamma_1 : \gamma_2$ auxquelles correspondront les $n + 1$ valeurs demandées de μ.

Si l'on donne G, G', G'', ... et, par suite Φ, on peut prendre H arbitrairement; la forme $\alpha_0 u_1^{n+1} + \ldots$, représentée par l'équation (11), sera évidemment une combinaison linéaire arbitraire de deux formes déterminées

$$(12) \quad \begin{cases} \varpi(u_1, u_2) = \beta_0 u_1^{n+1} + (n+1)\beta_1 u_1^n u_2 + \ldots + \beta_{n+1} u_2^{n+1}, \\ \chi(u_1, u_2) = \beta'_0 u_1^{n+1} + (n+1)\beta'_1 u_1^n u_2 + \ldots + \beta'_{n+1} u_2^{n+1}, \end{cases}$$

ces dernières étant définies par la condition d'être toutes deux apolaires à chacun des polynômes G, G', G'', ...; quant à $\gamma_1 : \gamma_2$, il devient complètement arbitraire. Par conséquent, la courbe $\Phi = 0$ est circonscrite à une infinité de polygones complets, tous formés de tangentes à la conique

$$x_2^2 - 4 x_1 x_3 = 0. \tag{13}$$

Si l'on emploie le système de coordonnées de M. Darboux; autrement dit, si l'on pose

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \rho + \rho_1, \qquad x_3 = \rho\rho_1,$$

cette courbe aura évidemment une équation de la forme

$$(14) \qquad \frac{\varpi(\rho)}{\chi(\rho)} = \frac{\varpi(\rho_1)}{\chi(\rho_1)}.$$

Inversement, on a ainsi la courbe la plus générale de degré n capable d'une infinité de polygones complets circonscrits à la conique (13). Car la relation algébrique $F(\rho, \rho_1) = 0$, qui lie les coordonnées ρ, ρ_1 d'un sommet du polygone, étant telle que les équations $F(\rho, \rho_1) = 0$, $F(\rho, \rho_2) = 0$ entraînent $F(\rho_1, \rho_2) = 0$, a *nécessairement, comme on sait*, la forme (14).

D'après ce qui précède, la condition pour que le réseau (10) contienne une puissance $n+1^{\text{ième}}$ exacte (et, par conséquent, une condition suffisante pour que Φ contienne un facteur linéaire), sera évidemment que les formes (12) aient un facteur commun.

Dans le cas de $n = 3$, on voit ainsi que l'on déduirait le résultant des deux formes cubiques (5) de la quantité précédemment appelée Δ en remplaçant chacun des déterminants $g_i g'_k - g'_i g_k$ par son complémentaire. Mais la forme de résultant ainsi obtenue n'est pas essentiellement distincte de celle que fournit la méthode de Bezout et Cauchy.

Bien entendu, à l'aide de n formes binaires de degré $n+2$, on obtiendrait des produits symboliques

$$\Phi = (gg')(g'g'')\ldots(g_1^3 x_1 + g_1^2 g_2 x_2 + g_1 g_2^2 x_3 + g_2^3 x_4)\ldots,$$

qui jouiraient de propriétés analogues et, égalés à zéro, représenteraient des surfaces circonscrites à une infinité de *polyèdres complets*.

6. Si maintenant nous sortons entièrement du terrain binaire, les remarques précédentes correspondront au fait général suivant :

Le nombre des variables étant quelconque et n symboles

$$u_g^k, \quad u_{g'}^k, \quad \ldots,$$

représentant provisoirement n formes de degré k, soit H un combinant de ces formes du premier degré par rapport à chacune d'elles et contenant d'ailleurs tels systèmes de variables auxiliaires que l'on voudra. Soit m un entier au moins égal à 1,

$$f = a_x^{1+m} = a_x'^{1+m} = \ldots$$

une forme de degré $1+m$. Envisageons le produit symbolique

$$\Phi = \mathrm{P} a_g^m a_g'^m \ldots a_x a_x' \ldots, \tag{15}$$

les g représentant, cette fois, non plus les symboles de formes de degré k, mais les symboles de formes G, G′, G″ de degré $k+m$.

L'expression Φ sera encore un combinant des formes G. Si d'ailleurs l'une d'elles, la première par exemple, est une puissance $k+m^{\text{ième}}$ exacte, l'expression Φ, considérée comme fonction des x, contiendra le facteur linéaire $a_g^m a_x$. Cette expression renfermera, par conséquent, un facteur linéaire toutes les fois que le réseau ayant pour bases les formes G contiendra une puissance exacte.

On retomberait sur l'expression (9) en prenant $k=n-1$, $m=2$,

$$\mathrm{P} = (gg'\gamma)(gg''\gamma)\ldots,$$

et supposant que les G se réduisent à des formes binaires aux variables u_1, u_2, pendant que a_x^3 est la forme

$$\frac{1}{6}(x_1^3 + x_2^3 + 6x_1x_2x_3)$$

$\left(\text{dont les dérivées secondes } \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \text{ se réduisent respectivement à } x_1, x_3, x_2\right)$ et que $u_\gamma^{\frac{n(n-1)}{2}}$ représente $u_3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Pour déduire de l'expression (15) des faisceaux de formes présentant la propriété considérée au n° **4**, nous prendrons pour les G les valeurs

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{G} = (\mathrm{A}_1 + \mu \mathrm{B}_1)\mathrm{P}_1^{k+m} & + (\mathrm{A}_2 + \mu \mathrm{B}_2)\mathrm{P}_2^{k+m} & + \ldots + (\mathrm{A}_{n+1} + \mu \mathrm{B}_{n+1})\mathrm{P}_{n+1}^{k+m}, \\
\mathrm{G}' = \mathrm{A}_1' \mathrm{P}_1^{k+m} & + \mathrm{A}_2' \mathrm{P}_2^{k+m} & + \ldots + \mathrm{A}_{n+1}' \mathrm{P}_{n+1}^{k+m}, \\
\mathrm{G}'' = \mathrm{A}_1'' \mathrm{P}_1^{k+m} & + \mathrm{A}_2'' \mathrm{P}_2^{k+m} & + \ldots + \mathrm{A}_{n+1}'' \mathrm{P}_{n+1}^{k+m}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

où le paramètre μ figure dans la première forme G, mais non dans les autres, les A et les B étant des nombres, les P des polynômes linéaires.

Le réseau ainsi constitué contiendra une puissance $k+m^{\text{ième}}$ exacte lorsque l'un des $n+1$ déterminants que l'on déduit de la matrice

$$\left\|\begin{matrix} A_1+\mu B_1 & A_2+\mu B_2 & \ldots & A_{n+1}+\mu B_{n+1} \\ A'_1 & A'_2 & \ldots & A'_{n+1} \\ A''_1 & A''_2 & \ldots & A''_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{matrix}\right\|$$

s'annulera, par conséquent pour $n+1$ valeurs de μ.

Au lieu de l'expression (15), on aurait pu considérer la formation plus simple

$$P g_x g'_x \ldots,$$

où les symboles g correspondent, cette fois, à des formes portant sur les variables ponctuelles x.

7. Une question très voisine de celle qui a été l'objet des considérations précédentes est relative à la réduction du nombre des variables essentielles qui figurent dans une forme.

Soit une forme f à $h+1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{h+1}$ (autrement dit, le premier membre de l'équation homogène d'une surface dans l'espace à h dimensions). Par quelles conditions exprimera-t-on que cette forme peut s'écrire comme fonction de h variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$ qui soient fonctions linéaires des premières? Pour $h = 3$, la question serait la suivante : exprimer qu'une surface algébrique est un cône.

On écrit immédiatement les conditions demandées en exprimant qu'un même point $(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1})$ annule toutes les dérivées d'ordre $n-1$ de f (si n est le degré de celle-ci), ou encore, en exprimant que le hessien de f s'annule identiquement.

Ces conditions s'obtiennent, par conséquent, en égalant à zéro des déterminants d'ordre $h+1$ formés avec les coefficients de f.

Leur degré minimum est vraisemblablement $h+1$. Mais là encore, malgré la simplicité relative des équations écrites, je n'ai pu, jusqu'à présent, arriver à une démonstration rigoureuse (¹).

8. Cette démonstration ne serait pas sans influence sur celle du théorème précédemment étudié. Il y a, en effet, lieu de prouver

(¹) Plus généralement, on pourrait énoncer que les conditions qui expriment qu'une forme à $h+1$ variables homogènes ne contient que $h'+1$ variables essentielles ($h' < h$), sont toutes au moins de degré $h'+2$. Ce fait n'est pas distinct du premier.

celui-ci, quel que soit le nombre h des variables et, en particulier, pour les grandes valeurs de ce nombre, puisque c'est dans ces conditions qu'est définie l'expression R (n° 1) et que, d'ailleurs, l'exactitude du théorème pour une valeur déterminée de h entraînerait évidemment son exactitude pour toute valeur moindre.

Or, si l'on admettait la nouvelle conclusion formulée au numéro précédent, il suffirait de considérer le cas de $h = n - 1$. Car si l'on avait montré que toute condition $F = 0$ de degré au plus égal à n, imposée aux coefficients d'une forme de degré n, et vérifiée toutes les fois que cette forme se décompose en facteurs linéaires, est vérifiée identiquement si le nombre des dimensions est $n - 1$, il en résulterait aussi qu'une telle condition est vérifiée, le nombre des dimensions étant quelconque, si la forme peut s'exprimer à l'aide de n variables homogènes, et, par conséquent, qu'elle est vérifiée identiquement pour toute valeur de h.

En tout cas, la relation qui existe entre les deux énoncés est de nature à montrer encore une fois l'utilité qu'il peut y avoir, dans la théorie des formes, à faire varier le nombre des dimensions.