

# BULLETIN DE LA S. M. F.

C. STÖRMER

## **Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 28 (1900), p. 146-157

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1900\\_\\_28\\_\\_146\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__146_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE DES LOGARITHMES  
DES NOMBRES ALGÈBRIQUES;**

Par M. CARL STÖRMER.

*1. Sur l'approximation des nombres incommensurables par des nombres rationnels.*

Soit  $\alpha$  un nombre incommensurable réel et positif. Comme on le sait, on peut le mettre d'une seule manière sous la forme d'une

fraction continue illimitée

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}$$

où  $a_0$  est un nombre entier positif ou  $= 0$  et où  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sont tous entiers et positifs. Désignons par  $\frac{P_n}{Q_n}$  les réduites successives de cette fraction continue, de manière que

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0, & P_2 &= a_1 a_0 + 1, & \dots, & P_{n+1} &= a_n P_n + P_{n-1}, & \dots, \\ Q_1 &= 1, & Q_2 &= a_1, & \dots, & Q_{n+1} &= a_n Q_n + Q_{n-1}, & \dots \end{aligned}$$

$P_n$  et  $Q_n$  sont alors des nombres entiers positifs premiers entre eux.

Comme on le sait, la première démonstration d'existence des nombres transcendants, due à Liouville (1), est basée sur une propriété remarquable des nombres  $a_n$  dans le cas où  $x$  est un nombre algébrique.

En effet, si  $x$  est une racine d'une équation algébrique à coefficients entiers et de degré  $r$ , on a l'inégalité suivante

$$(1) \quad \alpha_n < M Q_n^{r-2},$$

où  $M$  est un nombre qui ne dépend pas de  $n$ .

Dans le présent Mémoire nous allons établir une inégalité pareille pour les nombres positifs de la forme

$$\alpha = \frac{\log A}{\log B},$$

où  $A$  et  $B$  sont des nombres algébriques; par conséquent aussi pour les *logarithmes vulgaires des nombres algébriques*. (Cas  $B = 10$ .)

Commençons par quelques généralités. Suivons un procédé indiqué par M. Borel dans son exposé des recherches de Liouville (2). Soit  $f(x)$  une fonction analytique réelle de la variable réelle  $x$ , admettant le nombre  $\alpha$  comme zéro simple, et régulière en ce

(1) *Journal de Liouville*, t. XVI.

(2) BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 26.

point. Soit  $a, b$  un intervalle réel contenant  $\alpha$  et assez petit pour que  $f(x)$  soit régulière et n'ait pas d'autres zéros dans cet intervalle.

Soit  $\frac{p}{q}$  une fraction irréductible, valeur approchée de  $\alpha$  et contenue dans  $a, b$ .

Pour toute valeur  $x$  contenue dans l'intervalle  $a, b$ , on a

$$|f'(x)| < M,$$

où  $M$  est une constante ne dépendant que de l'intervalle  $a, b$ . En appliquant la formule de Taylor arrêtée à son premier terme, on a

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) f' \left[ \alpha + \theta \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \right]. \quad 0 < \theta < 1.$$

Or,  $\alpha + \theta \left(\frac{p}{q} - \alpha\right)$  étant contenue dans l'intervalle  $a, b$ , on aura

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| M,$$

ce qui donne

$$(2) \quad \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| > \frac{\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right|}{M}.$$

Si, en particulier,  $\frac{p}{q}$  est une des réduites  $\frac{P_n}{Q_n}$  de  $\alpha$  développé en fraction continue, on a l'inégalité suivante (!) :

$$(3) \quad \left| \frac{P_n}{Q_n} - \alpha \right| < \frac{1}{a_n Q_n^2}$$

ce qui donne

$$(4) \quad a_n < \frac{M}{Q_n^2 \left| f\left(\frac{P_n}{Q_n}\right) \right|}.$$

Pour en déduire des inégalités comme (1) il faut trouver une limite inférieure simple de  $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right|$  exprimée comme fonction de  $q$  par exemple. C'est ce qui est très facile dans le cas où  $f(x)$  est un polynôme de  $x$  à coefficients entiers et de degré  $r$ . En effet,

(1) BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 30.

ce polynome étant supposé n'avoir pas de racine rationnelle, on a

$$(5) \quad \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| > \frac{1}{q^r},$$

ce qui donne immédiatement l'inégalité de Liouville (1).

## 2. Inégalités fondamentales pour les logarithmes.

Soient A et B deux nombres positifs qu'on peut supposer pour plus de simplicité  $> 1$ . Posons

$$(6) \quad \frac{\log A}{\log B} = \alpha$$

et supposons que  $\alpha$  soit incommensurable. Pour cela il faut et il suffit qu'il n'existe pas de nombres entiers positifs  $m$  et  $n$  tels que  $A^m = B^n$ .

Nous allons appliquer à ce nombre  $\alpha$  le procédé que nous avons indiqué. A et B étant  $> 1$ ,  $\alpha$  sera positif. Conservons les mêmes notations qu'auparavant. Alors  $\alpha$  est racine positive de l'équation

$$B^x - A = 0$$

et la fonction  $f$  aura la valeur

$$f(x) = B^x - A,$$

d'où

$$f'(x) = B^x \log B.$$

Nous allons trouver une limite inférieure pour  $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right|$ .  $\alpha$  étant incommensurable, cette quantité est positive. Posons

$$(7) \quad \begin{cases} \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| B^{\frac{p}{q}} - A \right| = A\varepsilon, \\ |B^p - A^q| = A^q\varepsilon'. \end{cases}$$

Nous allons distinguer deux cas :  $B^p > A^q$  et  $B^p < A^q$ .

Dans le premier cas on aura

$$1 + \varepsilon = (1 + \varepsilon')^{\frac{1}{q}}.$$

En prenant les logarithmes et en appliquant la formule approchée

$$\log(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}, \quad 0 < \theta < 1,$$

on en déduit

$$\frac{\varepsilon}{1+\theta\varepsilon} = \frac{1}{q} \frac{\varepsilon'}{1+\theta'\varepsilon'},$$

$\theta$  et  $\theta'$  étant compris entre zéro et 1. Cela donne

$$(8) \quad \varepsilon > \frac{1}{q} \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}.$$

Dans le *second cas* on aura sûrement  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  moindres que 1 et

$$1 - \varepsilon = (1 - \varepsilon')^{\frac{1}{q}},$$

d'où l'on tire, comme auparavant,

$$\frac{\varepsilon}{1-\theta\varepsilon} = \frac{1}{q} \frac{\varepsilon'}{1-\theta'\varepsilon'},$$

d'où

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon'}{q} (1 - \varepsilon)$$

et comme  $\varepsilon < 1$

$$\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon'}{q}\right) > \frac{\varepsilon'}{q},$$

ce qui donne

$$(9) \quad \varepsilon > \frac{1}{q} \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}.$$

Des inégalités (8) et (9) on tire

$$(10) \quad \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| > \frac{A}{q} \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}$$

où  $\varepsilon'$  est donné par la formule (7). En substituant cette valeur dans la formule (2), il viendra

$$(11) \quad \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{A}{qM} \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}.$$

Cela posé, considérons les quotients incomplets  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  de  $x$  développé en fraction continue illimitée. En combi-

nant les inégalités (4) et (10) on obtient

$$(12) \quad a_n < \frac{M}{A} \frac{1 + \varepsilon_n}{Q_n \varepsilon_n}$$

où

$$(13) \quad \varepsilon_n = \frac{|B^{p_n} - A^{q_n}|}{A^{q_n}}.$$

Or, comme  $a_n$  est un nombre entier, il faut que  $\varepsilon_n$  pour  $n$  croissant soit de l'ordre de  $Q_n^{-1}$ . Par conséquent on peut trouver un nombre positif  $K$  indépendant de  $n$  et ne dépendant que de  $A$  et  $B$ , tel que

$$\frac{M}{A} (1 + \varepsilon_n) < K,$$

ce qui donne

$$(14) \quad a_n < K \frac{A^{q_n}}{Q_n |B^{p_n} - A^{q_n}|}.$$

### 3. Propriétés des logarithmes des nombres algébriques.

Jusqu'ici nous n'avons pas fait d'autres hypothèses sur la nature des nombres  $A$  et  $B$ , que de les supposer plus grands que 1 et tels que  $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$  soit incommensurable. Admettons de plus qu'ils soient des nombres algébriques. Soient, respectivement,

$$(15) \quad M_0 A^\mu + M_1 A^{\mu-1} + \dots + M_{\mu-1} A + M_\mu = 0 \quad (M_0 > 0)$$

et

$$(16) \quad N_0 B^\nu + N_1 B^{\nu-1} + \dots + N_{\nu-1} B + N_\nu = 0 \quad (N_0 > 0)$$

les équations irréductibles aux coefficients entiers, auxquelles satisfont  $A$  et  $B$ . Désignons par

$$A_1 = A, \quad A_2, \quad A_3, \quad \dots, \quad A_\mu$$

les racines de l'équation (15) et par

$$B_1 = B, \quad B_2, \quad B_3, \quad \dots, \quad B_\nu$$

les racines de (16). Posons

$$(17) \quad M_0^\mu N_0^\nu (A^\mu - B^\nu) = z.$$

Comme  $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$  est supposé incommensurable,  $z$  sera différent de zéro. Nous allons éliminer A et B entre les équations (15), (16) et (17). Posons

$$M_0^q N_0^p (A_i^q - B_j^p) = N_0^p (M_0 A_i)^q - M_0^q (N_0 B_j)^p = z_{i,j}.$$

Alors  $z$  sera racine de l'équation algébrique

$$(18) \quad \prod_{i,j} (z - z_{i,j}) = 0,$$

le produit étant étendu aux valeurs

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, 3, \dots, \mu, \\ j &= 1, 2, 3, \dots, \nu. \end{aligned}$$

En effectuant la multiplication au premier membre de (18), cette équation peut s'écrire

$$(18') \quad z^{\mu\nu} + C_1 z^{\mu\nu-1} + \dots + C_p z^{\mu\nu-p} + \dots + C_{\mu\nu} = 0.$$

Les coefficients  $C_p$  seront des *nombre entiers ou nuls*. En effet  $C_p$  est une fonction symétrique des quantités  $M_0 A_i$ , dont les coefficients sont des fonctions symétriques aux coefficients entiers des  $N_0 B_j$ . Comme les  $M_0 A_i$  et les  $N_0 B_j$  sont respectivement racines des équations

$$x^\mu + M_1 x^{\mu-1} + M_0 M_2 x^{\mu-2} + \dots + M_0^{\mu-1} M_\mu = 0$$

et

$$x^\nu + N_1 x^{\nu-1} + N_0 N_2 x^{\nu-2} + \dots + N_0^{\nu-1} N_\nu = 0,$$

il s'ensuit, par la théorie des fonctions symétriques <sup>(1)</sup>, que  $C_p$  est un polynome aux coefficients entiers des coefficients de ces deux équations et, par conséquent, égal à un nombre entier ou nul.

Cela posé, nous allons trouver une *limite supérieure des nombres*  $|C_p|$ . On a évidemment, en désignant par K un nombre plus grand que tous les  $|A_i|$  et  $|B_j|$ ,

$$|z_{i,j}| < M_0^q N_0^p (K^p + K^q).$$

(1) Voir, par exemple, SERRET : *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 317.

Or,  $\frac{p}{q}$  étant une valeur approchée de  $\alpha$ , on peut supposer qu'il existe un nombre positif  $r > 1$  et tel qu'on a pour tous les  $p$  et  $q$

$$rq > p.$$

Cela donne

$$|z_{i,j}| < 2[M_0 N_0^r K^r]^q.$$

On en tire que

$$|C_p| < \lambda (M_0 N_0^r K^r)^{pq} < \lambda (M_0 N_0^r K^r)^{\mu\nu q}$$

où  $\lambda$  ne dépend que de  $\mu$  et de  $\nu$  et non de  $p$  et de  $q$ . En posant

$$(M_0 N_0^r K^r)^{\mu\nu} = N,$$

on aura ainsi l'inégalité cherchée

$$(19) \quad |C_p| < \lambda N^q,$$

$\lambda$  et  $N$  étant des nombres fixes, dépendant de la nature de  $A$  et de  $B$  et non de  $p$  et de  $q$ .

Cela posé, il est facile de trouver une limite inférieure de  $|z|$ . Si l'équation (18) a des racines nulles, soient

$$C_{\mu\nu} = 0, \quad C_{\mu\nu-1} = 0, \quad \dots, \quad C_{\mu\nu-\lambda+1} = 0$$

et

$$C_{\mu\nu-\lambda} \geq 0.$$

Comme les coefficients  $C$  sont des nombres entiers ou nuls, on aura

$$(20) \quad |C_{\mu\nu-\lambda}| \geq 1.$$

Alors, le nombre  $z$ , défini par l'équation (17) et, d'après notre hypothèse, différent de zéro, est racine de l'équation

$$(21) \quad z^{\mu\nu-\lambda} + C_1 z^{\mu\nu-\lambda-1} + \dots + C_{\mu\nu-\lambda} = 0, \quad (\lambda \geq 0).$$

Or, comme on le sait (1), on a l'inégalité suivante

$$|z| > \frac{|C_{\mu\nu-\lambda}|}{|C| + |C_{\mu\nu-\lambda}|}$$

où  $|C|$  est le plus grand des nombres  $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_{\mu\nu-\lambda-1}|$ .

(1) Voir, par exemple, SERRET : *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 88.  
XXVIII.

En tenant compte des relations (19) et (20), cela donne

$$|z| > \frac{1}{2\lambda N^q},$$

ce qui donne, en substituant la valeur de  $z$  et en remarquant que  $rq > p$ ,

$$|A^q - B^p| > \frac{1}{2\lambda(M_0 N_0^r N)^q}$$

ou bien

$$(22) \quad |A^q - B^p| > \frac{\lambda_1}{N_1^q}$$

où  $\lambda_1$  et  $N_1$  sont des nombres fixes dépendant seulement de la nature de A et de B et non de  $p$  et de  $q$ .

Cela posé nous allons considérer le développement de  $\alpha$  en fraction continue. En combinant les inégalités (14) et (22), on obtiendra le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Soient A et B deux nombres algébriques positifs et  $> 1$  et supposons que*

$$\alpha = \frac{\log A}{\log B}$$

*soit incommensurable. Développons  $\alpha$  en fraction continue illimitée*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots$$

*et désignons par  $\frac{P_n}{Q_n}$  la  $n^{\text{ième}}$  réduite de cette fraction continue de manière que*

$$\begin{array}{llll} P_1 = a_0, & P_2 = a_1 a_0 + 1, & \dots, & P_{n+1} = a_n P_n + P_{n-1}, & \dots, \\ Q_1 = 1, & Q_2 = a_1, & \dots, & Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1}, & \dots \end{array}$$

*Alors on aura l'inégalité suivante*

$$(23) \quad a_n < K \frac{M Q_n}{Q_n}$$

*où K et M sont des nombres fixes dépendant de la nature de A et de B et indépendants de n.*

4. *Cas particuliers. Applications.*

Faisons d'abord cette remarque bien évidente que, si  $B = 10$ ,  $\alpha$  se réduira au *logarithme vulgaire* du nombre algébrique  $A$ .

Considérons un autre cas très simple, celui où  $A$  et  $B$  sont des nombres entiers. Rappelons la formule (14)

$$\alpha_n < K \frac{A^{Q_n}}{Q_n |B^{P_n} - A^{Q_n}|}$$

où  $K$  est un nombre fixe plus grand que  $\frac{M}{A} (1 + \varepsilon_n)$ .  $M$  est une limite supérieure de  $|B^x \log B|$  dans un intervalle comprenant  $\alpha$  et tous les  $\frac{P_n}{Q_n}$  et  $\varepsilon_n$  est définie par

$$\varepsilon_n = \frac{|B^{P_n} - A^{Q_n}|}{A^{Q_n}}.$$

Nous allons chercher des limites supérieures de  $M$  et de  $\varepsilon_n$ , ce qui donne une valeur de  $K$ . Considérons d'abord  $M$ . Comme

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \alpha \right| < \frac{1}{\alpha_n Q_n^2} < 1$$

toutes les  $\frac{P_n}{Q_n}$  seront comprises dans l'intervalle  $\alpha - 1, \alpha + 1$  et, par conséquent, on peut poser

$$M = B^{\alpha+1} \log B,$$

et, comme  $B^\alpha = A$ ,

$$(24) \quad M = AB \log B.$$

Considérons la quantité  $\varepsilon_n$ . En multipliant l'inégalité (3) par  $Q_n \log B$ , et en se rappelant la valeur de  $\alpha$ , on obtient

$$|P_n \log B - Q_n \log A| < \frac{\log B}{\alpha_n Q_n} < \log B$$

ou bien

$$\left| \log \frac{B^{P_n}}{A^{Q_n}} \right| < \log B.$$

Si  $B^{P_n} > A^{Q_n}$  on en déduit

$$(25) \quad 1 + \varepsilon_n < B.$$

Si, au contraire,  $B^{P_n} < A^{Q_n}$ , on aura  $\varepsilon_n < 1$  et

$$\frac{1}{1 - \varepsilon_n} < B$$

et l'on retombe sur l'inégalité ci-dessus en remarquant que  $B > 1$ .

On voit ainsi, par les inégalités (24) et (25), qu'on peut prendre pour  $K$  le nombre  $B^2 \log B$ , de sorte que la relation (14) prend la forme

$$(14') \quad a_n < \frac{A^{Q_n} B^2 \log B}{Q_n |B^{P_n} - A^{Q_n}|}$$

En remarquant que  $|B^{P_n} - A^{Q_n}| \geq 1$ , on en déduit le théorème suivant, corollaire de notre théorème général :

*Soient A et B deux nombres entiers  $> 1$  et tels que  $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$  est incommensurable. En développant  $\alpha$  en fraction continue et en conservant les mêmes notations qu'auparavant, on aura*

$$(26) \quad a_n < \frac{A^{Q_n}}{Q_n} B^2 \log B.$$

Du théorème général on peut tirer des conséquences intéressantes pour la théorie des nombres transcendants. En effet, si l'on forme une fraction continue illimitée, où  $a_n \geq F(n)$ ,  $F(n)$  étant  $> K \frac{M^{Q_n}}{Q_n}$  pour  $n$  assez grand, et cela quels que soient les nombres  $K$  et  $M$ , l'inégalité (23) ne peut pas subsister pour  $n$  assez grand, et comme il en sera de même pour l'inégalité de Liouville (1), la valeur de la fraction continue sera un nombre transcendant qui ne sera pas égal à un nombre de la forme  $\frac{\log A}{\log B}$ , A et B étant des nombres algébriques positifs et  $> 1$ .

Il suffit, pour cela, de poser, par exemple,

$$a_n = n^{Q_n}.$$

Alors le nombre

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots$$

sera un nombre transcendant qui ne sera pas égal à un nombre de la forme  $\frac{\log A}{\log B}$ , A et B étant algébriques, positifs et  $> 1$ , et, par conséquent, *qui ne sera pas égal à un logarithme vulgaire d'un nombre algébrique positif.*

Remarquons que l'existence de pareils nombres transcendants découle *a priori* des recherches de Cantor. En effet, il a démontré que l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu, tandis que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable<sup>(1)</sup>; comme il en est de même de l'ensemble des nombres  $\frac{\log A}{\log B}$ , A et B étant algébriques, il s'ensuit qu'il y a encore une infinité non dénombrable de nombres transcendants de la propriété demandée.

De même que nous avons traité, dans ce Mémoire, des nombres de la forme  $\frac{\log A}{\log B}$ , on pourrait appliquer le même procédé aux nombres

$$\frac{\arctang A}{\arctang B}, \quad \frac{\arcsin A}{\arcsin B}, \quad \frac{\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\int_0^B \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \dots$$

et à une infinité d'autres.

(<sup>1</sup>) Voir BOREL : *Leçons*, etc., p. 24, et *Journal de Crelle*, t. 77.