BULLETIN DE LA S. M. F.

LE ROUX

Sur un invariant d'un système de deux triangles et la théorie des intégrales doubles

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 168-172
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__168_1>

SUR UN INVARIANT D'UN SYSTÈME DE DEUX TRIANGLES ET LA THÉORIE DES INTÉGRALES DOUBLES;

Par M. Le Roux.

1. Dans une Note récente relative à un problème d'inversion d'intégrale double, j'ai été amené à considérer une intégrale double de la forme

$$-\frac{1.2}{4\pi^2}\int\int\frac{F(u\,v)\,du\,dv}{\left(1-\frac{x}{u}-\frac{y}{v}\right)^3 u^2 v^2},$$

évaluée suivant une surface fermée.

Cette intégrale se rapproche par certaines propriétés de l'intégrale simple.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2}$$

qui donne la dérivée de $f(x)$.

Dans la présente Note je m'occupe seulement de la différentielle double

$$\frac{du\,dv}{\left(1-\frac{x}{u}-\frac{y}{v}\right)^3 u^2 v^2}$$

qui devient

$$\frac{du\,dv}{(ux+vy+1)^3}$$

pour le changement de u, v, en $\frac{-1}{u}$ et $\frac{-1}{v}$.

Cette différentielle est liée à un certain invariant projectif d'un système de deux triangles par une relation analogue à celle qui existe entre la différentielle simple

$$\frac{dz}{(z-x)^2}$$

et le rapport anharmonique.

Considérons, en effet, dans le plan un système de deux triangles déterminés, le premier par ses sommets, le second par ses côtés. Soient x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3)$ les coordonnées ponctuelles des sommets du premier, u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$ les coordonnées tangentielles des côtés du second.

Si l'on pose

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \mathrm{D}, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

le rapport

$$\rho = \frac{\mathrm{D}\,\Delta}{(u_1x_1 + v_1y_1 + w_1z_1)(u_2x_2 + v_2y_2 + w_2z_2)(u_3x_3 + v_3y_3 + w_3z_3)}$$

constitue évidemment un invariant projectif absolu de la figure formée par les deux triangles, et peut être considéré dans un certain sens comme une généralisation du rapport anharmonique de deux couples de points.

Supposons que, d'une part, les sommets du premier et, d'autre part, les côtés du second soient des éléments infiniment voisins. Le numérateur de ρ devient alors le produit de deux différentielles doubles (*différentielles binaires,* suivant l'expression de M. Méray).

En introduisant pour chaque série de variables deux systèmes d'accroissements infiniment petits, nous désignerons par

$$x,\ y,\ z;\quad x + d_1x,\ y + d_1y,\ z + d_1z;\quad x + d_2x,\ y + d_2y,\ z + d_2z$$

les éléments du premier triangle, et par

$$u,\ v,\ w;\quad u + d_1u,\ v + d_1v,\ w + d_1w;\quad u + d_2u,\ v + d_2v,\ w + d_2w$$

les éléments du second. Nous poserons, en outre,

$$\begin{vmatrix} d_1x & d_1y \\ d_2x & d_2y \end{vmatrix} = d(x, y);$$

le rapport ρ prend alors la forme

$$\frac{[x\,d(y,z)+y\,d(z,x)+z\,d(x,y)][u\,d(v,w)+v\,d(w,u)+w\,d(u,v)]}{(ux+vy+wz)^3}.$$

En particulier pour $z=1$, $w=1$, cette expression devient

$$\frac{d(x,y)\,d(u,v)}{(ux+vy+1)^3}.$$

Effectuons, sur les variables x, y, une transformation homographique quelconque, et sur les variables u, v la transformation réciproque. En désignant par X, Y, U, V les nouvelles coordonnées, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\text{(1)}\qquad \frac{d(x,y),\,d(u,v)}{(ux+vy+1)^3}=\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\,d(\mathrm{U},\mathrm{V})}{(\mathrm{UX}+\mathrm{VY}+1)^3},$$

ou bien

$$\text{(2)}\qquad \frac{d(u,v)}{(ux+vy+1)^3}=\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{d(x,y)}\,\frac{d(\mathrm{U},\mathrm{V})}{(\mathrm{UX}+\mathrm{VY}+1)^3}.$$

Cette relation est analogue à la suivante :

$$\frac{dz}{(z-x)^2}=\frac{d\mathrm{X}}{dx}\,\frac{d\mathrm{Z}}{(\mathrm{Z}-\mathrm{X})^2}$$

que l'on déduit de la considération du rapport anharmonique.

L'équation (1), qu'il est facile de vérifier directement, permet de calculer l'un des déterminants fonctionnels

$$\frac{d(u,v)}{d(\mathrm{U},\mathrm{V})},\quad \frac{d(x.y)}{d(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$$

quand on connaît l'autre.

Nous avons, par exemple,

$$\frac{d(u,v)}{d(\mathrm{U},\mathrm{V})}=\frac{(ux+vy+1)^3}{(\mathrm{UX}+\mathrm{VY}+1)^3}\,\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{d(x,y)}.$$

Si nous remplaçons, dans le second membre, x, y par les coordonnées x_0, y_0 de la nouvelle origine, nous trouvons

$$\frac{d(u,v)}{d(\mathrm{U},\mathrm{V})}=(ux_0+vy_0+1)^3\left|\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{d(x,y)}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

2. L'intégrale double (¹)

$$1.2\iint \frac{d(x,y)}{(ux+vy+1)^3},$$

étendue à l'aire d'un triangle non coupé par la droite

$$ux+vy+1=0,$$

est l'analogue de l'intégrale simple $\int \frac{dz}{(z-x)^2}$. On peut l'obtenir sous une forme simple qui se prête admirablement à l'application des formules de M. Poincaré pour les résidus d'intégrales doubles. Soient

$$\begin{aligned} &(D_1) \quad a_1x+b_1y+c_1=0,\\ &(D_2) \quad a_2x+b_2y+c_2=0,\\ &(D_3 \quad a_3x+b_3y+c_3=0 \end{aligned}$$

les côtés du triangle. L'ordre de ces côtés donne le sens du parcours et définit le signe de l'intégrale.

Nous posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

et nous désignons par A_i, B_i, C_i les coefficients des éléments a_i, b_i, c_i dans ce déterminant. Soit, en outre, Δ_i le déterminant obtenu en remplacant dans Δ les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne par u, v, 1 :

$$\Delta_i = A_iu+B_iv+C_i.$$

Effectuons la transformation homographique

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ux+vy+1}=X,$$

$$\frac{a_2x+b_2y+c_2}{ux+vy+1}=Y.$$

(¹) La notation $d(x,y)$ pour la différentielle présente des avantages sur lesquels il est inutile d'insister. *Voir* les Mémoires de M. Méray (*Annales de l'École Normale,* 1899).

Le déterminant fonctionnel $\frac{d(x, y)}{d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}$ est égal à

$$\frac{(ux + vy + 1)^3}{\Delta_3}.$$

On a, par conséquent,

$$\frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3} = \frac{d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}{\Delta_3}$$

ou bien, en intégrant,

$$(3) \qquad 1.2\iint \frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3} = \frac{1.2}{\Delta_3}\iint d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Au triangle proposé correspond dans le nouveau système le triangle déterminé par les axes de coordonnées et par la droite D_3 dont l'équation est, sous la nouvelle forme,

$$\Delta - \Delta_1 \mathrm{X} - \Delta_2 \mathrm{Y} = 0.$$

De plus les aires intérieures des deux triangles se correspondent.

On a donc

$$\iint d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\Delta_1 \Delta_2},$$

et, par suite,

$$1.2\iint \frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3} = \frac{\Delta^2}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}.$$

C'est le résultat que nous voulions obtenir.

L'équation (3) montre que l'intégrale double

$$\iint \frac{d(x, y)}{(ux + vy + 1)^3}$$

peut être considérée comme une transformée homographique de l'aire.