BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 17-25
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__17_0>

SUR UNE CLASSE DE SURFACES ALGÉBRIQUES DONT LES COORDONNÉES S'EXPRIMENT PAR DES FONCTIONS UNIFORMES DE DEUX PARAMÈTRES;

Par M. Émile Picard.

1. Dans un Mémoire sur certaines transcendantes uniformes (*Journal de Mathématiques,* 1890), M. Poincaré s'est posé le problème suivant : Étant données une substitution rationnelle sur n variables

$$\begin{aligned}
u'_1 &= R_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\\
u'_2 &= R_2(u_1, u_2, \ldots, u_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u'_n &= R_n(u_1, u_2, \ldots, u_n),
\end{aligned}$$

et une constante m de module supérieur à l'unité, rechercher si l'on peut trouver des fonctions $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ uniformes dans tout le plan et holomorphes dans le voisinage de $t = 0$ (¹), telles que l'on ait

$$\begin{aligned}
f_1(mt) &= R_1[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)],\\
f_2(mt) &= R_2[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_n(mt) &= R_n[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)].
\end{aligned}$$

Nous allons nous poser un problème analogue, en supposant que les R, au lieu d'être des fonctions rationnelles, sont des fonctions algébriques; nous nous bornons aux cas de deux lettres, et nous posons le problème de la manière suivante :

Soit une surface algébrique

$$F(x, y, z) = 0$$

admettant une transformation rationnelle en elle-même

$$(S)\qquad \left\{\begin{aligned}
X &= R_1(x, y, z),\\
Y &= R_2(x, y, z),\\
Z &= R_3(x, y, z),
\end{aligned}\right.$$

(¹) J'ai traité le même problème (*Acta mathematica,* tomes XVIII et XXIII). en supposant que le point $t = 0$ puisse être *un point singulier essentiel* des fonctions f. Le problème est alors d'une tout autre nature et beaucoup plus général. Certaines relations, qui doivent être vérifiées nécessairement dans le problème de M. Poincaré, n'ont plus besoin d'avoir lieu; je ne m'occupe ici que de fonctions f holomorphes autour de l'origine.

et supposons que cette transformation admette comme point *double* le point $x = 0, y = 0, z = 0$, point simple par hypothèse de la surface. Nous voulons chercher des fonctions uniformes

$$f(t), \quad \varphi(t), \quad \psi(t),$$

telles que

$$F[f(t), \quad \varphi(t), \quad \psi(t)] = 0$$

et que

$$\begin{aligned} f(mt) &= R_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \\ \varphi(mt) &= R_2[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \\ \psi(mt) &= R_3[f(t), \varphi(t), \psi(t)]. \end{aligned}$$

2. Dans le voisinage de l'origine, la substitution S peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} X &= ax + by + \ldots, \\ Y &= a'x + b'y + \ldots; \end{aligned}$$

les seconds membres étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x et y, et convergentes dans le voisinage de $x = y = 0$. En faisant une combinaison linéaire convenable de x et y, et écartant un cas exceptionnel, on peut supposer que

$$b = a' = 0,$$

et nous prenons alors la substitution S sous la forme

$$\begin{aligned} X &= ax + \ldots, \\ Y &= b'y + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à *un*.

S'il existe des fonctions

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(t) &= At + \ldots, \\ \varphi(t) &= Bt + \ldots, \end{aligned} \right.$$

holomorphes dans le voisinage de $t = 0$, et satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} f(mt) &= af(t) + \ldots, \\ \varphi(mt) &= b'f(t) + \ldots, \end{aligned}$$

et si A et B ne sont pas nuls tous deux, soit, par exemple, $A \neq 0$, il faudra que $m = a$. Nous nous plaçons dans ce cas, et il est clair que, si b' n'est pas égal à a, il faudra que B soit nul. *Le cas* *particulièrement intéressant pour nous est celui où*

$$b' = a \quad (|a| > 1)$$

et nous adoptons maintenant cette hypothèse.

3. Nous allons montrer que les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} f(at) = af(t) + \ldots \\ \varphi(at) = a\varphi(t) + \ldots \end{cases} \qquad (\text{module de } a > 1),$$

où $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont les fonctions holomorphes représentées par les développements (1), définissent complètement ces fonctions f et φ, quand on se donne arbitrairement A et B. On voit d'abord de suite que l'on pourra déterminer de proche en proche les coefficients des développements (1) à l'aide des équations (2); il faut voir si ces développements sont convergents pour $|t|$ suffisamment petit.

Nous y parviendrons indirectement en démontrant par une autre voie l'existence des fonctions cherchées; ce sera en procédant par approximations successives, comme je l'ai fait dans le cas beaucoup plus complexe où $t = 0$ était une singularité essentielle. Posons

$$f(t) = At + F(t), \qquad \varphi(t) = Bt + \Phi(t),$$

nous avons les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} F(at) = aF(t) + P(t, F, \Phi), \\ \Phi(at) = a\Phi(t) + Q(t, F, \Phi), \end{cases}$$

où P et Q sont des séries entières en t, F et Φ, commençant par des termes du second degré par rapport à ces trois lettres. Nous allons obtenir des fonctions holomorphes F et Φ satisfaisant aux équations (3) et commençant par des termes au moins du second degré en t, en procédant de la manière suivante par approximations successives. On part de l'équation

$$F_1(at) = aF_1(t) + P(t, 0, 0),$$
$$\Phi_1(at) = a\Phi_1(t) + Q(t, 0, 0),$$

qui détermine un couple de fonctions $F_1(t)$ et $\Phi_1(t)$ commençant par des termes au moins du second degré. On prend ensuite l'équation

$$F_2(at) = aF_2(t) + P(t, F_1, \Phi_1),$$
$$\Phi_2(at) = a\Phi_2(t) + Q(t, F_1, \Phi_1),$$

qui détermine un couple F_2, Φ_2 dans les mêmes conditions, et ainsi de suite on passe de F_{n-1}, Φ_{n-1} à F_n, Φ_n par les équations

$$F_n(at) = aF_n(t) + P(t, F_{n-1}, \Phi_{n-1}),$$
$$\Phi_n(at) = a\Phi_n(t) + Q(t, F_{n-1}, \Phi_{n-1}).$$

Nous allons montrer que F_n et Φ_n ont des limites (pour $n = \infty$) fonctions holomorphes de t dans le voisinage de l'origine, et, par suite, les équations (2) admettront une solution de la forme (1) où A et B ont des valeurs données.

4. Il est clair qu'il suffira de faire le raisonnement dans le cas d'une seule fonction; nous considérerons donc une seule équation

$$(4) \qquad F(at) = aF(t) + P(t, F),$$

P étant une série en t et F commençant par des termes du second degré en t et F.

Un lemme préliminaire va nous être utile. Envisageons l'équation

$$F(at) = aF(t) + R(t),$$

$R(t)$ étant une fonction holomorphe dans le cercle et sur la circonférence C de rayon ρ décrit autour de l'origine comme centre, et dont, en outre, le développement commence par un terme en t^2, soit

$$R(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots.$$

On trouve de suite une fonction holomorphe

$$F(t) = A_2 t^2 + A_3 t^3 + \ldots + A_n t^n + \ldots$$

satisfaisant à la relation précédente, et l'on a

$$A_n = \frac{\alpha_n}{a^n - a}.$$

Si nous désignons par M le maximum du module de $R(t)$ sur la circonférence C, on aura

$$|\alpha_n| < \frac{M}{\rho^n},$$

et par suite, puisque $|a|$ est supérieur à l'unité, on aura à l'intérieur et sur la circonférence C

$$|F(t)| < k.M,$$

k étant un nombre positif qui dépend uniquement de a.

5. Revenons maintenant à l'équation (4) et aux équations successives envisagées au n° 3 :

$$F_n(at) = aF_n(t) + P(t, F_{n-1}) \qquad (F_0 = 0).$$

Si, dans le cercle de rayon ρ, on a

$$|F_{n-1}(t)| < M_{n-1},$$

on aura évidemment, d'après le lemme précédent, en désignant par $p(t, F)$ ce que devient $P(t, F)$ quand on remplace chaque coefficient par son module,

$$M_n < k.p(\rho, M_{n-1}).$$

Il est aisé d'en conclure une limite supérieure pour M_n. Considérons, à cet effet, la transformation

$$(5) \qquad x' = k.p(\rho, x).$$

Si ρ est suffisamment petit, l'équation

$$(6) \qquad x = k.p(\rho, x)$$

a une racine voisine de zéro (elle est de l'ordre de ρ^2). De plus, la dérivée de

$$k.p(\rho, x)$$

pour cette racine est aussi très petite (de l'ordre de ρ); elle a donc un module moindre que l'unité. Par suite, d'après une proposition bien connue, la transformation (S), répétée un nombre infini de fois en partant de $x = 0$, tend vers une limite qui est la racine de l'équation (6), et nous pouvons écrire

$$|F_n(t)| < K,$$

K étant un nombre fixe qui est très petit quand ρ est très petit.

Ceci ne suffit pas encore à établir que $F_n(t)$ tend vers une limite; mais considérons l'équation

$$F_n(at) - F_{n-1}(at) = a[F_n(t) - F_{n-1}(t)] + P(t, F_{n-1}) - P(t, F_{n-2}).$$

Or, d'après ce qui précède, on a manifestement

$$|P(t, F_{n-1}) - P(t, F_{n-2})| < \lambda \times \text{maximum de } |F_{n-1} - F_{n-2}|,$$

λ étant un nombre fixe, très petit si ρ est très petit. Donc, d'après le lemme du numéro précédent,

$$\text{Max. de } |F_n - F_{n-1}| < k.\lambda. \quad \text{Max. de } |F_{n-1} - F_{n-2}|,$$

ces maxima étant, bien entendu, relatifs au cercle C de rayon ρ. Or, si ρ est très petit, on aura

$$k.\lambda < 1,$$

puisque λ est très petit en même temps que ρ. On voit par suite que la série

$$F_1 + (F_2 - F_1) + \ldots + (F_n - F_{n-1}) + \ldots$$

est uniformément convergente dans le cercle de rayon ρ, si le rayon de ce cercle est assez petit, et nous avons alors établi que $F_n(t)$ converge uniformément vers une limite qui est une fonction holomorphe dans le cercle C.

6. Nous avons donc obtenu des fonctions satisfaisant aux conditions du n° 1, et qui se trouvent définies dans le cercle C, où elles sont holomorphes. Les relations

$$\begin{aligned} f(at) &= R_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \\ \varphi(at) &= R_2[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \\ \psi(at) &= R_3[f(t), \varphi(t), \psi(t)] \end{aligned}$$

permettent de faire de proche en proche l'extension des fonctions f, φ, ψ dans tout le plan, en passant successivement aux cercles de rayon $|a|.\rho$, puis $|a^2|.\rho$ et ainsi de suite. Ces fonctions seront méromorphes dans tout le plan, ayant seulement, en général, le point à l'infini comme point singulier essentiel.

7. Envisageons maintenant ces fonctions à un point de vue un peu différent. Elles dépendent de la variable t et de deux constantes A et B, et sont des fonctions méromorphes de ces trois lettres pour

toutes les valeurs finies. Mais il suffit de regarder chacune des approximations successives qui nous ont servi dans les démonstrations précédentes pour voir que f, φ et ψ sont en réalité des fonctions de At et Bt. Si donc on pose

$$At = u, \qquad Bt = v,$$

les trois coordonnées x, y, z d'un point de la surface se trouveront exprimées par des fonctions uniformes des variables indépendantes u et v. Il n'est pas douteux que le déterminant fonctionnel de u et v soit différent de zéro, puisque dans le voisinage de $u = 0$, $v = 0$, on a les développements

$$x = u + \ldots,$$
$$y = v + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier en u et v.

Notre surface jouit donc de la propriété remarquable suivante : *Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface peuvent s'exprimer par*

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(u, v), \end{cases}$$

les trois fonctions f, φ, ψ étant des fonctions méromorphes à distance finie des deux variables indépendantes u et v, et jouissant de la propriété exprimée par les identités

$$f(au, av) = R_1[f(u, v), \ \varphi(u, v), \ \psi(u, v)],$$
$$\varphi(au, av) = R_2[f(u, v), \ \varphi(u, v), \ \psi(u, v)],$$
$$\psi(au, av) = R_3[f(u, v), \ \varphi(u, v), \ \psi(u, v)],$$

qui se déduisent du remplacement de t par at.

8. Ici se posent plusieurs questions sur lesquelles j'appellerai l'attention plutôt que je ne les résoudrai. Tout d'abord les surfaces supposées existent-elles ? Je veux dire : en dehors de certaines surfaces qui se présentent immédiatement. Les surfaces unicursales admettent évidemment une infinité de transformations rationnelles satisfaisant aux conditions requises. Il en est de même pour les surfaces se rattachant aux fonctions abéliennes, telles

que x, y, z s'expriment en fonctions abéliennes de deux paramètres U et V, de telle façon qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de U et V, abstraction faite des multiples des périodes. En effet, à la transformation

$$(U, V;\quad mU, mV) \qquad (m \text{ entier})$$

correspond une transformation rationnelle de la forme S (on suppose que $U = 0$, $V = 0$ correspond à un point simple de la surface). Le nombre a est ici égal à l'entier m. En partant de la substitution S, l'application des considérations que nous venons de développer nous ramènerait précisément aux fonctions abéliennes.

L'existence étant admise de surfaces algébriques d'un type nouveau au point de vue d'une représentation paramétrique, une question d'une autre nature se poserait. *La représentation* (E) *atteint-elle tout point de la surface?* Il se pourrait *a priori* qu'à l'ensemble des valeurs de u et v correspondît seulement une portion de la surface.

9. Pour la première question posée, il semble au premier abord que les conditions imposées à la surface, relativement à la transformation rationnelle S, sont assez peu limitatives. Mais l'exemple des courbes algébriques nous montre qu'il ne faut pas se fier aux apparences. On pourrait se proposer pour les courbes un problème tout analogue à celui que nous avons étudié pour les surfaces, en supposant qu'une courbe

$$F(x, y) = 0$$

possède une transformation rationnelle en elle-même

$$(S)' \qquad \begin{cases} X = R_1(x, y), \\ Y = R_2(x, y), \end{cases}$$

ayant un point double à l'origine qui serait un point simple de la courbe, de telle sorte que $(S)'$ puisse ramener autour de l'origine à

$$X = ax + \ldots,$$

le second membre étant une série entière en x, et les termes non écrits étant de degrés supérieurs à *un, avec la condition supplémentaire*

$$|a| > 1.$$

Pour une telle courbe F, on aura, en raisonnant comme plus haut,

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u),$$

f et φ étant des fonctions méromorphes de u dans tout le plan, qui satisfont aux relations

$$f(au) = R_1[f(u), \varphi(u)],$$
$$\varphi(au) = R_2[f(u), \varphi(u)].$$

Or, les courbes possédant une transformation $(S)'$ qui jouisse des propriétés requises *sont nécessairement du genre zéro ou un.* On peut le voir d'une manière élémentaire, et cela résulte aussi immédiatement d'une propriété générale que j'ai établie autrefois sur les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique. On ne connaît malheureusement aucun théorème analogue relatif à des fonctions uniformes de deux variables, et les cas d'une représentation paramétrique pour une surface algébrique à l'aide de fonctions uniformes ne sont pas nombreux; en dehors des surfaces unicursales et des surfaces hyperelliptiques (avec leurs dégénérescences), je ne vois guère à citer que les surfaces hyperfuchsiennes et les surfaces hyperabéliennes. Il n'est pas impossible qu'une étude approfondie du type signalé dans les pages précédentes conduise à des découvertes intéressantes; c'est ce qui m'a engagé à publier les résultats que l'on vient de lire, quelque incomplets et même en un sens quelque hypothétiques qu'ils puissent être.