Bulletin de la S. M. F.

E. Landau

Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 25-38

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__25_1>

SUR QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS;

Par M. E. Landau.

1. Le théorème, regardé comme exact depuis longtemps, que la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x, c'est-à-dire que son quotient par x tend, pour $x = \infty$, vers l'unité, a été démontré pour la première fois indé-

pendamment par M. Hadamard ([1]) et par M. de la Vallée-Poussin ([2]), de même que le théorème plus général que la somme des logarithmes des nombres premiers q, inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée de raison k (première au terme initial), est asymptotique à $\frac{x}{\varphi(k)}$.

Je désigne, dans ce qui suit, l'égalité asymptotique par le signe $\backsim$; j'entends, en outre, par $\{G(x)\}$ une fonction telle que son quotient par une fonction déterminée $G(x)$ tend, pour $x=\infty$, vers o, et par $O[G(x)]$ une fonction telle que son quotient par $G(x)$ reste compris, pour $x=\infty$, entre deux limites finies; dans le cas particulier où elles coïncident, le quotient tend vers o ou vers une autre limite finie.

Les remarques qui forment le point de départ des pages suivantes se rattachent à la méthode employée par M. Hadamard pour arriver au résultat mentionné plus haut. M. Hadamard établit d'abord, pour $\mu > 1$, l'équation asymptotique

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{q\leqq x}\log q\,\log^{\mu-1}\frac{x}{q}\backsim\frac{x}{\varphi(k)}\tag{1}$$

et en déduit le théorème énoncé, qui correspond au cas $\mu=1$. Mais il ne croit pas ([3]) que l'équation générale (1) puisse se déduire inversement de la relation correspondant à $\mu=1$ et pose le problème de rechercher quels renseignements la relation générale (1) fournit sur l'erreur commise en remplaçant $\sum_{q\leqq x}\log q$ par sa valeur asymptotique, c'est-à-dire sur l'ordre de grandeur de la différence

$$\sum_{q\leqq x}\log q-\frac{x}{\varphi(k)}.$$

On verra cependant, dans la suite, qu'il est possible de déduire

---

([1]) *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmétiques* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXIV; 1896).

([2]) *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX, 2e Partie; 1896).

([3]) *Loc. cit.*, p. 219.

l'équation asymptotique (1) de la seule équation

$$\sum_{q \leqq x} \log q \backsim \frac{x}{\varphi(k)}, \tag{2}$$

de sorte qu'il faut donner à la question posée par M. Hadamard la réponse que l'équation (1) ne saurait fournir aucun renseignement sur la fonction $\sum_{q \leqq x} \log q - \frac{x}{\varphi(k)}$, vu que l'équation (1) subsiste non seulement pour les nombres premiers de la progression arithmétique, mais aussi pour toute classe de nombres q satisfaisant à la seule condition que la somme des logarithmes de tous les nombres q inférieurs à x soit asymptotique à $\frac{x}{\varphi(k)}$.

Il suffit de considérer la suite naturelle des nombres au lieu d'une progression arithmétique quelconque; car, abstraction faite du facteur $\varphi(k)$ entrant dans toutes les formules, les considérations sont, dans le cas général, littéralement les mêmes.

2. Je pars donc de la relation

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \backsim x \tag{3}$$

et je me propose d'en déduire

$$\sum_{p \leqq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} \backsim x\Gamma(\mu) \qquad (\mu > 1), \tag{4}$$

où les sommes s'étendent à tous les nombres premiers qui ne sont pas supérieurs à x.

Déjà Tchebycheff a appliqué l'artifice de la sommation partielle, dû à Abel, à la considération de sommes étendues aux nombres premiers d'un intervalle donné. On se convainc facilement que les développements du septième Chapitre de son *Mémoire sur les nombres premiers* (1), de même que ceux de Hargreave (2) et de Polignac (3) sont, *mutatis mutandis,* valables aussi dans le cas

(1) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XVII, p. 382; 1852.

(2) *Analytical researches concerning numbers* (*Philosophical Magazine*, third series, t. XXXV, p. 49; 1849).

(3) *Recherches nouvelles sur les nombres premiers* (*Comptes rendus*, t. XLIX, p. 350; 1859).

que le terme général $F(\nu)$ de la somme dépend non seulement de ν, mais aussi des limites de la sommation.

En combinant ces considérations avec le théorème (3), on obtient comme corollaire la proposition suivante :

Si une fonction réelle de deux arguments positifs $F(\nu, x)$ *satisfait aux trois conditions suivantes :*

1° $$F(\nu, x) \geqq 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq x,$$

2° $$\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} \geqq \frac{F(\nu', x)}{\log \nu'} \text{ pour } 2 \leqq \nu \leqq \nu' \leqq x,$$

3° *en donnant à* ν *une valeur déterminée quelconque,*

$$F(\nu, x) = \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\},$$

ces conditions sont suffisantes pour pouvoir énoncer l'égalité asymptotique

$$\sum_{p \leqq x} F(p, x) \backsim \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du.$$

Démonstration. — En définissant une fonction $\varepsilon(x)$ au moyen de l'équation

$$\mathfrak{I}(x) = \sum_{p \leqq x} \log p = x + x\varepsilon(x)$$

[$\varepsilon(0)$ doit signifier 0], et en tenant compte de ce que

$$1 + \nu\varepsilon(\nu) - (\nu - 1)\varepsilon(\nu - 1) = \mathfrak{I}(\nu) - \mathfrak{I}(\nu - 1) = \log \nu \text{ ou } 0,$$

suivant que le nombre ν est premier ou composé, on a

$$\sum_{p \leqq x} F(p, x) = \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\mathfrak{I}(\nu) - \mathfrak{I}(\nu - 1)}{\log \nu} F(\nu, x)$$

$$= \sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu} + \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu\varepsilon(\nu) - (\nu - 1)\varepsilon(\nu - 1)}{\log \nu} F(\nu, x),$$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \sum_{p \leqq x} F(p, x) = \sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu} + \sum_{\nu=2}^{x-1} \nu\varepsilon(\nu) \left[\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{F(\nu + 1, x)}{\log(\nu + 1)} \right] \\ + x\varepsilon(x) \frac{F(x, x)}{\log x} + \frac{F(2, x)}{\log 2}. \end{aligned} \right.$$

Comme la fonction $\frac{F(\nu, x)}{\log \nu}$ va en décroissant si ν augmente (deuxième hypothèse), on peut remplacer la somme $\sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu}$ par l'intégrale correspondante avec une erreur d'ordre

$$F(2, x) = \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\}$$

(troisième hypothèse). On a donc

$$\sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu} = \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du + \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\}.$$

Soit δ un nombre positif donné. On peut déterminer un nombre ϖ tel que, pour $\nu \geqq \varpi$,

$$|\varepsilon(\nu)| < \frac{\delta}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\nu=2}^{x-1} \nu\varepsilon(\nu) \left[\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{F(\nu+1, x)}{\log(\nu+1)} \right] + x\varepsilon(x) \frac{F(x, x)}{\log x} \right| \\ &\leqq \left| \sum_{\nu=2}^{\varpi-1} \nu\varepsilon(\nu) \left[\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{F(\nu+1, x)}{\log(\nu+1)} \right] \right| \\ &\quad + \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=\varpi}^{x-1} \nu \left[\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{F(\nu+1, x)}{\log(\nu+1)} \right] + \frac{\delta}{2} x \frac{F(x, x)}{\log x}. \end{aligned}$$

La première somme du second membre se compose d'un nombre fini de termes d'ordre inférieur à $\int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du$ (troisième hypothèse); donc le second membre

$$\begin{aligned} &\leqq \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\} + \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu} [\nu - (\nu - 1)] \\ &= \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\} + \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour x suffisamment grand,

$$\leqq \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du + \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du = \delta \int^x \frac{F(u, x)}{\log u} du;$$

le quotient par $\int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du$ tend donc, pour $x = \infty$, vers o, et il résulte de (5) que

$$(6) \qquad \sum_{p \leq x} F(p, x) = \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du + \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. En prenant

$$F(\nu, x) = \log \nu \log^{\mu-1} \frac{x}{\nu},$$

on obtient

$$\sum_{p \leq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} \backsim \int_2^x \log^{\mu-1} \frac{x}{u} du \backsim \int_1^x \log^{\mu-1} \frac{x}{u} du,$$

d'où, en posant $x = ue^y$,

$$\sum_{p \leq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} \backsim -x \int_{\log x}^0 e^{-y} y^{\mu-1} dy = x \int_0^{\log x} e^{-y} y^{\mu-1} dy$$
$$= x \int_0^\infty e^{-y} y^{\mu-1} dy - x \int_{\log x}^\infty e^{-y} y^{\mu-1} dy = x \Gamma(\mu) + \{x\} \backsim x \Gamma(\mu),$$

ce qui constitue le théorème (4) de M. Hadamard.

4. Je résoudrai, dans ce qui suit, en n'appliquant pas d'autres ressources transcendantes que le théorème (3), le problème :

Trouver la valeur asymptotique du nombre $\pi_k(x)$ de tous les nombres inférieurs à x et composés de k nombres premiers, tous différents.

Ce problème a été énoncé par Hargreave (1), mais je crois qu'on ne s'en est pas occupé jusqu'à présent.

On a d'abord

$$\pi_1(x) = \pi(x) \backsim \frac{x}{\log x};$$

cette égalité asymptotique a été déduite par M. von Mangoldt

(1) *Loc. cit.*, p. 53.

et par M. de la Vallée-Poussin (¹) du théorème (3) et est, du reste, un cas particulier de (6), pour $F(\nu, x) = 1$.

$\pi_2(x)$ est égal au nombre des paires de nombres premiers p, q tels que

$$pq \leqq x$$

et

$$p < q.$$

En ne tenant compte que de la première de ces deux inégalités, on obtient deux fois tout nombre pq si p et q sont différents et une fois tout nombre p^2; donc

$$2\pi_2(x) = \sum_{p \leqq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right) - \pi(\sqrt{x}),$$

identité connue.

On peut appliquer à la somme

$$\sum_{p \leqq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right)$$

la proposition du n° **2**, ce qui donne

$$\sum_{p \leqq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right) \backsim \int_2^x \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du = \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du$$

$\left[\text{car } \pi\left(\frac{x}{u}\right) = 0 \text{ pour } u > \frac{x}{2}\right]$. Soit δ une grandeur positive donnée; ϖ étant convenablement choisi, on a, pour $\frac{x}{u} \geqq \varpi$, c'est-à-dire pour $u \leqq \frac{x}{\varpi}$,

$$\left| \pi\left(\frac{x}{u}\right) - \frac{x}{u(\log x - \log u)} \right| \leqq \delta \frac{x}{u(\log x - \log u)},$$

donc

$$\left| \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du - x \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u (\log x - \log u)} \right|$$

$$\leqq \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{\log u} \left| \pi\left(\frac{x}{u}\right) - \frac{x}{u(\log x - \log u)} \right| \leqq \delta x \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u (\log x - \log u)}.$$

(¹) Von Mangoldt, *Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*Journal de Crelle*, t. 119, p. 65-71; 1898).

Or

$$\begin{aligned}
&\log x \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u(\log x - \log u)} \\
&= \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \left(\frac{1}{\log u} + \frac{1}{\log x - \log u}\right) d\log u \\
&= [\log\log u - \log(\log x - \log u)]_2^{\frac{x}{\varpi}} \\
&= \log\log\frac{x}{\varpi} - \log\log\varpi - \log\log 2 + \log\log\frac{x}{2} \\
&= 2\log\log x + O(1),
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\frac{x}{\varpi}}^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\, du \leqq \pi(\varpi) \int_{\frac{x}{\varpi}}^{x} \frac{du}{\log u} \leqq \pi(\varpi)\,\mathrm{Li}(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right);$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_2^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\, du &= \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\, du + \int_{\frac{x}{\varpi}}^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\, du \\
&= \frac{2x\log\log x}{\log x} + \left\{\frac{x\log\log x}{\log x}\right\},
\end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de ce que

$$\pi(\sqrt{x}) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right),$$

$$(7) \qquad \pi_2(x) \backsim \frac{x\log\log x}{\log x}.$$

En suivant ce chemin, on parvient au théorème

$$(8) \qquad \pi_k(x) \backsim \frac{1}{(k-1)!} \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}.$$

Je suppose qu'il soit déjà démontré pour les valeurs $1, 2, \ldots, k$ et je l'établirai pour $k+1$.

Chacun des $\pi_{k+1}(x)$ nombres composés de $k+1$ nombres premiers, tous différents, peut être mis, de $k+1$ manières, sous la forme $p.n$, p désignant un nombre premier; n sera composé de k nombres premiers, tous différents entre eux et différents de p. Donc

$$(9) \qquad (k+1)\pi_{k+1}(x) = \sum_{p \leqq x} \pi_k\left(\frac{x}{p}\right) - q(x),$$

où $q(x)$ désigne le nombre des nombres inférieurs à x et qui contiennent $k-1$ nombres premiers une seule fois et un $k^{\text{ième}}$ deux fois. On a, comme $\pi_{k-1}\left(\frac{x}{p^2}\right)$ égale 0 pour $p > \sqrt{\frac{x}{2}}$,

$$q(x) = O\sum_{p \leqq \sqrt{\frac{x}{2}}} \pi_{k-1}\left(\frac{x}{p^2}\right) = O\int_2^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{\pi_{k-1}\frac{x}{u^2}}{\log u}\,du$$

$$= O\int_2^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{x(\log\log x)^{k-2}}{u^2(\log x - 2\log u)}\frac{du}{\log u}$$

$$= x(\log\log x)^{k-2} O\int_2^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{du}{u^2\log u(\log x - 2\log u)}.$$

Or, si l'on pose $u = \frac{1}{v}$, cette intégrale

$$= -\int_{\sqrt{\frac{2}{x}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{\log v(\log x + 2\log v)}$$

$$= -\frac{1}{\log x}\int_{\sqrt{\frac{2}{x}}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\log v} - \frac{2}{\log x + 2\log v}\right)dv$$

$$= -\frac{1}{\log x}\left(\int_{\sqrt{\frac{2}{x}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{\log v} - \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \frac{dw}{\log w}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}\log x} O\left(\operatorname{Li}\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Donc

$$q(x) = O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-2}}{\log x}\right],$$

ce qui est d'ordre inférieur à $\pi_k(x)$ et, *a fortiori*, à $\pi_{k+1}(x)$. L'équation (9) donne donc

$$(k+1)\pi_{k+1}(x) \backsim \sum_{p\leqq x} \pi_k\left(\frac{x}{p}\right) \backsim \int_2^x \frac{\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\,du \backsim \int_2^{\frac{x}{a}} \frac{\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\,du,$$

a désignant une constante quelconque ([1]). Comme dans le cas spécial $k = 2$ traité plus haut, on commet une erreur asymptotiquement inférieure à la valeur de l'intégrale en remplaçant

$$\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)$$

par

$$\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{x[\log(\log x - \log u)]^{k-1}}{u(\log x - \log u)}.$$

Donc

$$(10)\quad (k-1)!\,(k+1)\pi_{k+1}(x) \backsim x\int_2^{\frac{x}{a}} \frac{[\log(\log x - \log u)]^{k-1}\,d\log u}{\log u(\log x - \log u)}.$$

a doit être pris $\geqq e$, pour que $\log(\log x - \log u)$ soit $\geqq 0$.

Il faut maintenant calculer la valeur asymptotique de cette intégrale qui, en mettant

$$\log x = \xi,\qquad \log u = \eta,$$

se transforme en

$$\int_{\log 2}^{\xi - \log a} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta(\xi - \eta)}\,d\eta.$$

En prenant $a = e$ et en remplaçant la limite inférieure par 1, on ne commet qu'une erreur d'ordre $\frac{(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$. Or,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi-\eta)}{\eta(\xi-\eta)}\,d\eta \\ &\quad = \frac{1}{\xi}\int_1^{\xi-1}\frac{\log^{k-1}(\xi-\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta + \frac{1}{\xi}\int_1^{\xi-1}\frac{\log^{k-1}(\xi-\eta)}{\eta}\,d\eta.\end{aligned}\right.$$

La première de ces deux intégrales s'évalue directement :

$$(12)\quad \int_1^{\xi-1}\frac{\log^{k-1}(\xi-\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta = \frac{1}{k}[-\log^k(\xi-\eta)]_1^{\xi-1} = \frac{1}{k}\log^k(\xi-1).$$

([1]) Car la différence de ces deux intégrales est d'ordre

$$\int_{\frac{x}{a}}^{x}\frac{du}{\log u} = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

et les intégrales mêmes sont d'ordre plus élevé.

On trouve la valeur asymptotique de la seconde en tenant compte de ce que

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \frac{\log^{k-1}(\xi-\eta)}{\eta}\,d\eta = \log^{k-1}\xi\, O\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi}\frac{d\eta}{\eta} = O(\log^{k-1}\xi),$$

et que, pour $\eta \leqq \frac{\xi}{2}$,

$$\begin{aligned}\log^{k-1}(\xi-\eta) &= \left[\log\xi + \log\left(1-\frac{\eta}{\xi}\right)\right]^{k-1} = [\log\xi + O(1)]^{k-1}\\ &= \log^{k-1}\xi + O(\log^{k-2}\xi);\end{aligned}$$

on obtient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_1^{\xi-1}\frac{\log^{k-1}(\xi-\eta)}{\eta}\,d\eta\\ &\quad= \log^{k-1}\xi\int_1^{\frac{\xi}{2}}\frac{d\eta}{\eta} + \log^{k-2}\xi\, O\int_1^{\frac{\xi}{2}}\frac{d\eta}{\eta} + O(\log^{k-1}\xi)\\ &\quad= \log^{k}\xi + O(\log^{k-1}\xi).\end{aligned}\right.$$

De (10), (11), (12), (13), on conclut

$$(k-1)!\,(k+1)\pi_{k+1}(x) \backsim \frac{x}{\log x}\left(\frac{1}{k}+1\right)(\log\log x)^k,$$

$$\pi_{k+1}(x) \backsim \frac{1}{k!}\,\frac{x(\log\log x)^k}{\log x},$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. L'erreur commise, en remplaçant, dans les hypothèses du n° 2, la somme

$$\sum_{p\leqq x} F(p,x)$$

par sa valeur asymptotique, peut être appréciée, avec plus ou moins de succès, au moyen du théorème récemment établi par M. de la Vallée-Poussin [1], que

$$\varepsilon(x) = O\left(e^{-a\sqrt{\log x}}\right),$$

a désignant une constante positive.

---

[1] *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée* (*Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. LIX, p. 54; 1899).

On tire de (5)

$$\sum_{p \leqq x} \mathrm{F}(p, x) = \int_2^x \frac{\mathrm{F}(u, x)}{\log u} du$$
$$+ \mathrm{O}[\mathrm{F}(2, x)] + \mathrm{O} \sum_{\nu=2}^{x-1} \nu e^{-a\sqrt{\log \nu}} \left[\frac{\mathrm{F}(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{\mathrm{F}(\nu + 1, x)}{\log(\nu + 1)} \right]$$
$$+ \mathrm{O}\left[x e^{-a\sqrt{\log x}} \mathrm{F}(x, x) \right].$$

Pour

$$\mathrm{F}(\nu, x) = 1,$$

on a

$$\sum_{\nu=2}^{x-1} \nu e^{-a\sqrt{\log \nu}} \left[\frac{1}{\log \nu} - \frac{1}{\log(\nu + 1)} \right] = \sum_{\nu=2}^{x-1} e^{-a\sqrt{\log \nu}} \frac{\nu \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)}{\log \nu \log(\nu + 1)}$$
$$< \sum_{\nu=2}^{x-1} e^{-a\sqrt{\log \nu}} \nu \cdot \frac{1}{\nu} < \sum_{\nu=1}^{x} e^{-a\sqrt{\log \nu}} = \mathrm{O} \int_1^x e^{-a\sqrt{\log \nu}} d\nu$$
$$= \mathrm{O}\left(x e^{-a\sqrt{\log x}} \right).$$

L'erreur commise en remplaçant le nombre $\pi(x)$ des nombres premiers $\leqq x$ par le logarithme intégral

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\delta = 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\delta}^{x} \frac{du}{\log u} \right)$$

est donc

$$\mathrm{O}\left(x e^{-a\sqrt{\log x}} \right).$$

Ce résultat n'est pas nouveau; il a été établi par M. de la Vallée-Poussin dans le cinquième Chapitre de son Mémoire cité ([1]); mais les développements précédents font voir que, le théorème

$$\sum_{p \leqq x} \log p = x + \mathrm{O}\left(x e^{-a\sqrt{\log x}} \right)$$

une fois établi, on n'a pas besoin de remonter à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ pour démontrer que

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}\left(x e^{-a\sqrt{\log x}} \right).$$

([1]) *Loc. cit.*, p. 63.

Pour la fonction désignée plus haut par $\pi_k(x)$, on obtient, par la même méthode,

$$(14) \quad \pi_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x} + O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-2}}{\log x}\right] \quad (^1).$$

La même formule (14) donne aussi la valeur asymptotique du nombre $\rho_k(x)$ des nombres $\leqq x$ qui sont divisibles par k nombres premiers différents pouvant être affectés d'exposants supérieurs à 1, de même que celle du nombre $\sigma_k(x)$ des nombres $\leqq x$ qui sont composés de k nombres premiers, les facteurs multiples étant comptés selon leur degré de multiplicité.

En effet, ceci est évident pour $k=1$, où les deux fonctions $\sigma_1(x)$ et $\pi_1(x)$ coïncident, tandis que $\rho_1(x) - \pi_1(x)$ est le nombre des solutions de

$$p^m \leqq x \qquad (m \geqq 2),$$

donc d'ordre $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$.

Supposons que le théorème soit déjà démontré pour les indices 1, 2, ..., k; il s'agit de l'établir pour l'indice $k+1$. Vu que

$$\begin{aligned} 0 \leqq \sigma_{k+1}(x) - \pi_{k+1}(x) &\leqq \rho_1(x) + \rho_2(x) + \ldots + \rho_k(x) \\ &= O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right] \end{aligned}$$

(car tout nombre composé de $k+1$ facteurs premiers, pas tous différents, en a 1 ou 2, ..., ou k différents), il suffit de le prouver pour $\rho_{k+1}(x)$. Tout nombre divisible par $k+1$ nombres premiers, dont un au moins est affecté d'un exposant supérieur à 1, est de la forme

$$n = p^\alpha m \leqq x,$$

où $\alpha \geqq 2$ et où m est un nombre composé de k nombres premiers différents entre eux, mais affectés d'exposants quelconques. Or, le

---

(1) Pour $k=1$, le théorème de M. de la Vallée-Poussin donne l'approximation plus grande

$$\pi_1(x) = \mathrm{Li}(x) + O(xe^{-a\sqrt{\log x}}) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

nombre des solutions de

$$p^\alpha \leqq \frac{x}{m} \qquad (\alpha \geqq 2$$

est

$$\rho_1\left(\frac{x}{m}\right) - \pi_1\left(\frac{x}{m}\right),$$

donc, *a fortiori*,

$$= O\sqrt{\frac{x}{m}}.$$

Par conséquent,

$$0 \leqq \rho_{k+1}(x) - \pi_{k+1}(x) = O\sum_m \sqrt{\frac{x}{m}} = \sqrt{x}\, O \sum_m \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Le nombre des valeurs que m peut prendre

$$= \rho_k(x) = O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right].$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_m \frac{1}{\sqrt{m}} &= \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\rho_k(\nu) - \rho_k(\nu-1)}{\sqrt{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{x} \rho_k(\nu)\left[\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right] + \frac{\rho_k(x)}{\sqrt{x+1}} \\
&= O\sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu(\log\log\nu)^{k-1}}{\log\nu}\,\frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}} + O\left[\frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right] \\
&= O\int_2^x \frac{(\log\log u)^{k-1}}{\log u}\,\frac{du}{\sqrt{u}} + O\left[\frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right] \\
&= O\left[\frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right];
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
\rho_{k+1}(x) &= \pi_{k+1}(x) + O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right] \\
&= \frac{1}{k!}\,\frac{x(\log\log x)^k}{\log x} + O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right],
\end{aligned}$$

ce qui prouve que le second membre de l'équation (14) représente aussi les valeurs des fonctions $\rho_k(x)$ et $\sigma_k(x)$ pour de grands arguments.