BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BRICARD

Sur les systèmes réciproques de points

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 130-139
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__130_1>

SUR LES SYSTÈMES RÉCIPROQUES DE POINTS;

Par M. R. Bricard.

1. Je considère dans ce qui suit des systèmes constitués par n points du plan ou de l'espace, qui seront toujours désignés par une lettre quelconque affectée des indices $1, 2, \ldots, n$.

Deux systèmes de n points $S = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $S' = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ seront regardés comme *identiques* s'ils forment deux figures directement ou inversement semblables, deux points homologues dans ces figures étant désignés par des lettres affectées d'un même indice. On écrira alors

$$S' = S.$$

Si les deux systèmes S et S′ forment des figures semblables, les points homologues ne portant pas les mêmes indices, appelons T la substitution qui fait passer de la permutation $1, 2, \ldots, n$ à la permutation formée par les indices des points b qui sont respectivement homologues des points $a_1, \ldots, a_n$; on écrira

$$S' = ST.$$

2. Je vais maintenant définir ce que j'entends par *systèmes réciproques de points.*

Considérons le système $S = (a_1, \ldots, a_n)$ et, prenant le point a_1 pour pôle, soumettons à une inversion de puissance arbitraire le système des points $a_2, \ldots, a_n$. Ces points sont ainsi remplacés par de nouveaux points $a'_2, \ldots, a'_n$. *Le système* $(a_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *sera dit réciproque du système* S *par rapport au point* a_1. Plus généralement, si le système $S' = (b_1, \ldots, b_n)$ est identique au système $(a_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ (en donnant au mot *identique* le sens qui a été fixé plus haut), on dira que *les systèmes* S *et* S′ *sont réciproques par rapport au couple de points* (a_1, b_1). Il est bien évident que S se déduit de S′ comme S′ a été déduit de S.

J'appellerai R_1 l'opération qui fait passer du système S à S', et j'écrirai

$$S' = SR_1.$$

On définira de même les opérations $R_2, \ldots, R_n$, appliquées à un système de n points.

On voit que les opérations $R_1, \ldots, R_n$ ne sont définies *que si on les applique à un système donné.* Un exemple précisera le sens de cette remarque. Effectuons d'abord sur le système S la transposition des indices 1 et 2 et, au nouveau système, appliquons l'opération R_1. L'opération définitive appliquée au système S sera désignée par

$$(12)R_1$$

et le système obtenu sera désigné par

$$S(12)R_1.$$

Dans cette dernière expression, *le symbole* R_1 *n'a pas le même sens que dans l'expression* SR_1. Il est clair en effet que, *géométriquement,* le système $S(12)R_1$ est identique au système SR_2 et n'en diffère que par la transposition des indices 1 et 2.

Si au système S on applique l'opération R_i, au système obtenu l'opération R_j, au nouveau système l'opération R_k, et ainsi de suite, l'opération définitive appliquée au système S sera désignée par $R_iR_jR_k \ldots$, mais on ne doit pas perdre de vue que, dans cette notation, le sens d'un symbole tel que R_k *dépend des opérations précédentes.*

On a évidemment

$$R_1^2 = R_2^2 \ldots = R_n^2 = 1.$$

3. Voici la propriété fondamentale des systèmes réciproques :

Si deux systèmes de points $S = (a_1, \ldots, a_n)$ *et* $S' = (b_1, \ldots, b_n)$ *sont réciproques par rapport à un couple de points* (a_1, b_1), *les systèmes dérivés de* S, *par l'application des diverses opérations* $R_2, \ldots, R_n$, *et les systèmes dérivés de* S', *par l'application des mêmes opérations, sont géométriquement identiques* (*c'est-à-dire à l'ordre près des indices*).

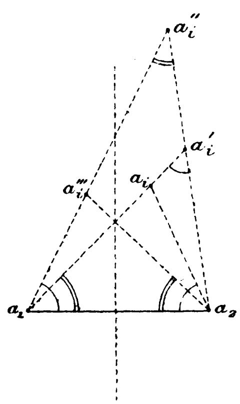
Examinons, en effet, le résultat de l'opération $R_1R_2R_1$ appliquée au système S.

La puissance d'inversion qui figure dans la première opération R_1 peut être prise égale au carré de la longueur du segment $a_1 a_2$; l'opération R_1 ainsi particularisée ne change donc ni le point a_1 ni le point a_2.

Nous conserverons la même puissance d'inversion pour chacune des deux autres opérations qui doivent être successivement appliquées au système; de la sorte, l'opération $R_1 R_2 R_1$, appliquée au système S, laisse à leurs positions initiales le point a_1 et le point a_2.

Soit a_i (*fig.* 1) un autre point du système S; l'opération R_1

Fig. 1.



lui substitue le point a_i', l'opération $R_1 R_2$ le point a_i'', et l'opération $R_1 R_2 R_1$ le point a_i'''.

Il résulte d'une propriété bien connue de l'inversion que *les points a_i et a_i''' sont symétriques par rapport au plan mené perpendiculairement au segment $a_1 a_2$, en son milieu.* Voici d'ailleurs la démonstration bien simple de cette proposition :

Il est d'abord évident que les points a_1, a_2, a_i, a_i', a_i'', a_i''' sont tous dans un même plan. En outre, des couples de triangles semblables, que l'on aperçoit immédiatement, donnent lieu aux égalités d'angles

$$a_1 a_2 a_i = a_1 a_i' a_2 = a_2 a_1 a_i''',$$
$$a_2 a_1 a_i = a_2 a_i'' a_1 = a_1 a_2 a_i''',$$

qui suffisent évidemment à établir la propriété dont il s'agit.

D'après cela, le système formé par les points a_1, a_2, a_3''', ... a_n''', c'est-à-dire le système $SR_1R_2R_1$ est symétrique, par rapport à un plan, du système formé par les points a_2, a_1, a_3, ..., a_n, c'est-à-dire du système $S(12)$; on peut donc dire, en vertu de la convention faite au début, que les systèmes $SR_1R_2R_1$ et $S(12)$ sont *identiques,* et écrire

$$R_1R_2R_1 = (12)$$

ou

$$R_1R_2 = (12)R_1.$$

On a, en général,

$$(1) \qquad R_iR_j = (ij)R_i,$$

ce qui démontre bien la proposition énoncée au commencement de ce paragraphe.

4. La propriété exprimée par la relation (1) se généralise aisément de la manière suivante : Soient $T_0 = 1$, T_1, ..., $T_{n!-1}$, les $n!$ substitutions du groupe symétrique de n éléments. Nous considérerons les opérations en nombre $(n+1)!$

$$U_k = T_hR_i \qquad (h = 0, 1, \ldots, n!-1;\ i = 0, 1, \ldots n),$$

en posant

$$R_0 = 1.$$

Si l'on applique au système S l'opération U_k et au système obtenu l'opération $U_{k'}$, le système auquel on parvient finalement peut être dérivé du système S par l'application d'une seule opération $U_{k''}$ convenablement choisie. En d'autres termes, on peut écrire

$$U_kU_{k'} = U_{k''}$$

et dire que les opérations U constituent un groupe.

Remarquons une fois encore que ce groupe diffère de ceux que l'on considère d'habitude en ce qu'*une opération* U *n'est définie que par la connaissance du système auquel elle s'applique.*

Il faut montrer l'existence d'une égalité telle que

$$(2) \qquad T_hR_iT_{h'}R_{i'} = T_{h''}R_{i''}.$$

On voit d'abord que l'égalité (1), après multiplication des deux membres à droite et à gauche par R_i, donne

$$R_j R_i = R_i (ij);$$

de cette même égalité (1) on tire, par permutation des indices i et j,

$$R_j R_i = (ij) R_j,$$

d'où, par comparaison,

$$R_i (ij) = (ij)(R_j). \tag{3}$$

Montrons ensuite que, si les indices j et k sont différents de i, l'opération R_i est permutable à la transposition (jk). On a, en effet, la relation

$$(jk) = (ij)(jk)(ki),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} R_i(jk) &= R_i(ij)(jk)(ki) = (ij) R_j (jk) ki) \\ &= (ij)(jk) R_k (ki) = (ij)(jk)(ki) R_i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$R_i (jk) = (jk) R_i. \tag{4}$$

Les égalités (2) et (3), qu'il est d'ailleurs bien facile d'établir directement, permettent d'écrire l'égalité plus générale

$$T_h R_i = R_j T_k, \tag{5}$$

en se donnant arbitrairement h et i dans le premier membre et en choisissant convenablement j et k dans le second. En effet T_h peut être décomposée en un produit de transpositions à la gauche desquelles on fera successivement passer l'opération R, en appliquant à chaque fois l'égalité (3) ou l'égalité (4), suivant le cas. On parviendra finalement à une égalité de la forme (5).

L'égalité (2) se démontre alors immédiatement. En effet, on peut écrire

$$T_h R_i T_{h'} R_{i'} = T_h R_i R_{j'} T_{k'} = T_h (ij') R_i T_{k'} = T_h (i_{j'}) T_{k''} R_{i''} = T_{h''} R_{i''}.$$

Montrons en terminant que le groupe des opérations U est *isomorphe au groupe symétrique de $n+1$ éléments.*

En effet, toute substitution de ce dernier groupe peut se mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$T_h \sigma_i \qquad (h = 0, 1, \ldots, n! - 1; \qquad i = 0, 1, \ldots n),$$

en posant

$$\sigma_0 = 1, \qquad \sigma_i = (i, n+1).$$

L'égalité

$$T_h R_i T_{h'} R_{i'} = T_{h''} R_{i''}$$

entraîne la suivante

$$T_h \sigma_i T_{h'} \sigma_{i'} = T_{h''} \sigma_{i''}.$$

On le voit immédiatement, en remarquant que les égalités (3) et (4) restent vraies si l'on y remplace les symboles R_i par les symboles σ_i. Cette constatation suffit évidemment à entraîner l'isomorphisme dont il s'agit; en effet, l'égalité (2) a pu être écrite en utilisant seulement les égalités (3) et (4).

5. Quand les n points donnés appartiennent à un même plan, on peut considérablement généraliser les résultats qui précèdent en considérant les transformations quadratiques dont les triangles fondamentaux ont pour sommets trois points quelconques appartenant au système. C'est là un sujet d'étude sur lequel je me propose de revenir prochainement.

6. Les systèmes réciproques de points peuvent se présenter dans certaines questions géométriques. Je vais donner un exemple de ce fait, et il serait intéressant d'en trouver d'autres.

Nous aurons affaire, dans cette application, à des systèmes de quatre points. Je dirai, pour abréger le langage, que *les deux tétraèdres* $a_1 a_2 a_3 a_4$ *et* $b_1 b_2 b_3 b_4$ *sont réciproques par rapport au couple de sommets* (a_1, b_1), si les deux systèmes de points (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) sont réciproques par rapport au couple de points (a_1, b_1).

Si les deux tétraèdres $a_1 a_2 a_3 a_4$ et $b_1 b_2 b_3 b_4$ sont réciproques par rapport au couple de sommets (a_1, b_1), on a les égalités d'angles

$$\widehat{a_2 a_1 a_3} = \widehat{b_2 b_1 b_3}, \qquad \widehat{a_3 a_1 a_4} = \widehat{b_3 b_1 b_4}. \qquad \widehat{a_4 a_1 a_2} = \widehat{b_4 b_1 b_2}.$$

De plus, les égalités

$$a_1 a_2 . b_1 b_2 = a_1 a_3 . b_1 b_3 = a_1 a_4 . b_1 b_4$$

peuvent s'écrire

$$\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = \frac{b_1 b_3}{b_1 b_2}, \qquad \frac{a_1 a_3}{b_1 b_4} = \frac{a_1 a_4}{b_1 b_3}, \qquad \frac{a_1 a_4}{a_1 a_2} = \frac{b_1 b_2}{b_1 b_4},$$

d'où il résulte que les triangles $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_3 a_4$, $a_1 a_4 a_2$ sont respectivement semblables aux triangles $b_1 b_3 b_2$, $b_1 b_4 b_3$, $b_1 b_2 b_4$.

Réciproquement, si les deux tétraèdres $a_1 a_2 a_3 a_4$, $b_1 b_2 b_3 b_4$ présentent ces trois couples de faces semblables, ils sont réciproques par rapport au couple de sommets (a_1, b_1).

Cela posé, on a le théorème suivant :

Soient a, b, c, d, e cinq points quelconques de l'espace. Les cinq tétraèdres, dont chacun a pour sommets les projections de l'un des points donnés sur les faces du tétraèdre ayant pour sommets les quatre autres, sont deux à deux réciproques par rapport à un couple de sommets convenablement choisi.

Soient, par exemple, e_a, e_b, e_c, e_d les projections du point e sur les faces du tétraèdre $abcd$ (e_a est sur la face bcd, etc.); soient de même a_e, a_b, a_c, a_d les projections du point a sur les faces du tétraèdre $ebcd$. *Les deux tétraèdres $e_a e_b e_c e_d$, $a_e a_b a_c a_d$ sont réciproques par rapport au couple de sommets (e_a, a_e).*

Pour établir cette proposition, il suffit, d'après ce qui a été dit, de montrer que les triangles $e_a e_b e_c$, $e_a e_c e_d$, $e_a e_d e_b$ sont semblables, respectivement, aux triangles

$$a_e a_c a_b, \quad a_e a_d a_c, \quad a_e a_b a_d.$$

Dans ce but, je calculerai les longueurs des arêtes de chacun des tétraèdres. Il suffit, en fait, de calculer pour chaque tétraèdre des quantités auxquelles ses arêtes sont proportionnelles.

Par le point e, menons un plan perpendiculaire à la droite cd (*fig.* 2). Ce plan contient les points e_a, e_b et rencontre la droite cd en un point m; le quadrilatère plan $e e_a m e_b$ a deux angles droits, en e_a et e_b; $e_a e_b$ est donc, dans un cercle de diamètre em, une corde sous-tendant un angle inscrit $e_a e e_b$ égal au dièdre

$\widehat{cd}$ ou supplémentaire de ce dièdre. On a par suite l'égalité

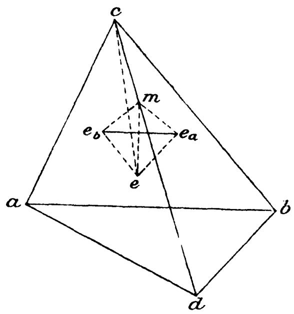
$$e_a e_b = em \sin \widehat{cd} = ce \sin \widehat{ecd} \sin \widehat{cd},$$

ce que l'on peut écrire

$$e_a e_b = \left(ce.cd \sin \widehat{ecd}\right)\left(\frac{acd.bcd}{cd} \sin \widehat{cd}\right) \frac{1}{acd.bcd},$$

où acd, bcd désignent les aires des triangles acd, bcd. Or, dans

Fig. 2.



l'égalité précédente, le premier facteur entre parenthèses a pour valeur $2\,ecd$.

Le second facteur, en vertu d'une formule connue, a pour valeur $\frac{3}{2}$V, V désignant le volume du tétraèdre *abcd*.

On peut donc écrire

$$e_a e_b = 3\mathrm{V}\,\frac{ecd}{acd.bcd} = \frac{3\mathrm{V}}{acd.bcd.cab.dab}\,ecd.cab.dab.$$

C'est la formule à laquelle je voulais parvenir.

On formera de même les expressions des diverses arêtes du tétraèdre $e_a e_b e_c e_d$. Toutes ces valeurs ont un facteur commun; en le supprimant, on obtient les relations

$$\begin{aligned} & e_a e_b : ecd.cab.dab \\ = {} & e_a e_c : edb.dac.bac \\ = {} & e_a e_d : ebc.bad.cad \\ = {} & e_c e_d : eab.acd.bcd \\ = {} & e_d e_b : eac.adb.cdb \\ = {} & e_b e_c : ead.abc.dbc. \end{aligned}$$

De même, le tétraèdre $a_e a_b a_c a_d$ donne lieu aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} & a_e a_b : acd.ceb.deb \\ = \; & a_e a_c : adb.dec.bec \\ = \; & a_e a_d : abc.bed.ced \\ = \; & a_c a_d : aeb.ecd.bcd \\ = \; & a_d a_b : aec.edb.cdb \\ = \; & a_b a_c : aed.ebc.dbc. \end{aligned}$$

Au moyen de ces relations, on vérifiera aisément que les deux tétraèdres $e_a e_b e_c e_d$, $a_e a_b a_c a_d$ sont bien réciproques par rapport au couple de sommets $e_a a_e$. Montrons, par exemple, que les triangles $e_a e_b e_c$, $a_e a_c a_b$ sont semblables. On doit avoir

$$\frac{e_a e_b}{a_e a_c} = \frac{e_a e_c}{a_e a_b} = \frac{e_b e_c}{a_b a_c}$$

ou

$$\frac{ecd.cab.dab}{adb.dec.bec} = \frac{edb.dac.bac}{acd.ceb.deb} = \frac{ead.abc.dbc}{aed.ebc.dbc},$$

ce qui est exact.

Notre théorème est donc établi. Il renferme des cas particuliers intéressants.

Tout d'abord, si l'un des tétraèdres tels que $a_e a_b a_c a_d$ se réduit à un plan, il en est de même des cinq autres. On arrive ainsi à ce théorème, établi directement et d'une manière toute différente par M. Duporcq :

Si cinq points de l'espace sont tels qu'en projetant l'un d'eux sur les faces du tétraèdre ayant pour sommets les quatre autres, on obtient quatre points dans un même plan, il en est de même quand, dans cette construction, on permute d'une manière quelconque les rôles assignés aux cinq points (1).

On obtient une autre proposition particulière en supposant que

---

(1) *Voir* le *Bulletin*, 1901, p. 29. C'est en généralisant le théorème de M. Duporcq que j'ai obtenu le théorème du § 4 du présent Mémoire et que j'ai été conduit, par une nouvelle extension, à la considération des systèmes réciproques de n points.

l'un des tétraèdres tels que $a_e a_b a_c a_d$ est *régulier*. Il en est alors de même des quatre tétraèdres analogues.

La propriété obtenue s'énonce comme le théorème de M. Duporcq, en remplaçant les mots *quatre points dans un même plan* par ceux-ci : *sommets d'un tétraèdre régulier*.