BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur la dynamique des corps déformables

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 176-190
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__176_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA DYNAMIQUE DES CORPS DÉFORMABLES;

Par M. L. Lecornu.

La théorie générale de la rotation d'un corps de forme variable est exposée dans le Tome II du *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand. La présente Note a pour objet de formuler quelques remarques qui se rattachent à cette théorie et qui concernent principalement les propriétés de la force vive.

1. Je suppose que le corps possède un point fixe O, et je prends ce point comme origine des coordonnées. (S'il s'agissait d'un corps entièrement libre, on placerait l'origine au centre de gravité, et il n'y aurait à introduire dans ce qui va suivre que des modifications légères, faciles à apercevoir.) Je prends comme axes mobiles de coordonnées les trois axes d'inertie principaux relatifs au point O. Désignons par A, B, C les moments d'inertie principaux; par p, q, r les composantes de la rotation instantanée éprouvée par le trièdre des trois axes; par f, g, h les sommes des moments des quantités de mouvement relatives aux axes, sommes qu'on peut appeler, avec Tisserand, les *moments de rotation*. Soient enfin L, M, N les sommes des moments des forces appliquées au corps. En écrivant, par application du théorème de Resal, que la vitesse absolue du moment résultant des quantités de mouvement est identique au moment résultant des forces, on obtient immédiatement les trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\mathrm{A}p+f)+(\mathrm{C}-\mathrm{B})qr+qh-rg=\mathrm{L},\\ &\frac{d}{dt}(\mathrm{B}q+g)+(\mathrm{A}-\mathrm{C})rp+rf-ph=\mathrm{M},\\ &\frac{d}{dt}(\mathrm{C}r+h)+(\mathrm{B}-\mathrm{A})pq+pg-qf=\mathrm{N}.\end{aligned}\right.$$

2. Si x', y', z' sont les dérivées de x, y, z par rapport au temps, la vitesse d'un point quelconque du corps a pour composantes, suivant trois axes fixes coïncidant, à l'instant t, avec les axes

mobiles,

$$x' + qz - ry,$$
$$y' + rx - pz,$$
$$z' + py - qx.$$

En tenant compte des relations

$$\begin{aligned} f &= \Sigma m(yz' - y'z), & A &= \Sigma m(y^2 + z^2), \\ g &= \Sigma m(zx' - z'x), & B &= \Sigma m(z^2 + x^2), \\ h &= \Sigma m(xy' - x'y), & C &= \Sigma m(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

on trouve pour expression de la force vive totale

$$2T = \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2(fp + gq + hr) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

$\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ représente la force vive *relative*. Nous l'écrirons, pour abréger, $\Sigma m x'^2$.

$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ est la force vive d'*entraînement*.

Le troisième groupe de termes, $2(fp + gq + hr)$, est ce qu'on peut appeler la *force vive composée*.

3. A un autre point de vue, nous ferons deux parts de la force vive totale, et nous distinguerons :

La force vive *utilisable*, qui subsisterait seule si, par l'introduction de nouvelles liaisons intérieures, on solidifiait subitement le système, de manière à rendre x, y, z indépendants du temps;

La force vive *inutilisable*, qui disparaîtrait au même instant.

D'après le théorème de Carnot, la force vive inutilisable, ainsi définie, n'est autre chose que la force vive correspondant aux vitesses perdues par l'effet des liaisons. Pour l'évaluer, appelons p_1, q_1, r_1 les variations éprouvées par p, q, r au moment de la solidification. La variation de vitesse du point (x, y, z) a pour composantes

$$(2)\qquad \begin{cases} q_1 z - r_1 y - x', \\ r_1 x - p_1 z - y', \\ p_1 y - q_1 x - z'. \end{cases}$$

On en déduit, pour la perte de force vive,

$$\Sigma m x'^2 - 2(fp_1 + gq_1 + hz_1) + Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2.$$

D'autre part, les équations (1), intégrées pour le temps infiniment petit correspondant à l'introduction des liaisons, donnent

$$(3)\qquad \begin{cases} Ap_1 - f = 0, \\ Bq_1 - g = 0, \\ Cr_1 - h = 0, \end{cases}$$

d'où

$$Ap_1^2 + Bq_1^2 + Cr_1^2 = fp_1 + gq_1 + hr_1 = \frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C}.$$

La perte de force vive est donc

$$(4)\qquad \Sigma m\, x'^2 - \left(\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C}\right).$$

Telle est la force vive inutilisable; on voit qu'elle est toujours inférieure à la force vive relative. La force vive utilisable a conséquemment pour valeur

$$(5)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2(fp + gq + hr) + \frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C}$$

ou, plus simplement,

$$(6)\qquad A(p + p_1)^2 + B(q + q_1)^2 + C(r + r_1)^2.$$

On arriverait immédiatement au même résultat en remarquant que, les composantes de la rotation devenant $p + p_1$, $q + q_1$, $r + r_1$, l'équation (6) donne la force vive du corps solidifié.

On peut poser

$$\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C} = \frac{f^2 + g^2 + h^2}{D}$$

en désignant par D une quantité comprise entre le plus grand et le plus petit moment d'inertie. L'expression (5) montre alors que la force vive utilisable est la somme de la force vive d'entraînement, de la force vive composée et d'une partie seulement de la force vive relative, partie égale à $\frac{f^2 + g^2 + h^2}{D}$.

4. Les équations (2) font voir que la vitesse perdue ou gagnée en chaque point est la différence géométrique entre la vitesse relative antérieure à la solidification et la vitesse due à une rotation p_1, q_1, r_1. Celle-ci n'entraînant aucune déformation, on peut dire que toute la force vive de déformation est inutilisable.

Pour que la force vive soit entièrement utilisable, il faut qu'on ait partout

$$x' = q_1 z - r_1 y,$$
$$y' = r_1 x - p_1 z,$$
$$z' = p_1 y - q_1 x.$$

Mais on a constamment

$$\Sigma m\, xy = \Sigma m yz = \Sigma m\, zx = 0,$$

d'où

$$\Sigma m(x'y + y'x) = \Sigma m(x^2 - y^2) r_1 = (\mathrm{B} - \mathrm{A}) r_1 = 0$$

et de même

$$(\mathrm{C} - \mathrm{B}) p_1 = 0, \qquad (\mathrm{A} - \mathrm{C}) q_1 = 0.$$

Il résulte de là : 1° que le mouvement relatif, s'il existe, doit se réduire à une rotation; 2° que l'axe de rotation doit coïncider avec un axe principal, qui doit être en même temps un axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie. Il y a exception si $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$. Dans ce cas, la rotation peut s'effectuer autour d'un axe quelconque.

5. Étudions maintenant le travail des forces agissant sur le corps déformable. Si l'on appelle X, Y, Z les composantes de la force extérieure appliquée au point x, y, z, le travail des forces extérieures, pendant le temps dt, est

$$d\mathrm{E} = (\mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r)\,dt + \Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz).$$

$\Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$ est le travail des forces extérieures dans le mouvement relatif. Pour abréger, nous l'appellerons *travail relatif* et nous le désignerons par $d\mathrm{F}$.

Soit, d'autre part, $d\mathrm{I}$ le travail élémentaire des forces intérieures.

On a

$$d\mathrm{E} + d\mathrm{I} = d\mathrm{T},$$

d'où

$$d\mathrm{I} = d\mathrm{T} - d\mathrm{E} = d\Sigma \tfrac{1}{2} m\, x'^2 + d(fp + gq + hr)$$
$$+ \tfrac{1}{2} d(\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2) - (\mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r)\,dt - d\mathrm{F}.$$

Mais les équations (1) donnent

$$p\,d(\mathrm{A}p + f) + q\,d(\mathrm{B}q + g) + r\,d(\mathrm{C}r + h) = (\mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r)\,dt.$$

Par suite

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} dl + d\mathrm{F} = d\Sigma \tfrac{1}{2} m\, x'^2 + f dp + g dq + h ar \\ - \tfrac{1}{2}(p^2 d\mathrm{A} + q^2 d\mathrm{B} + r^2 d\mathrm{C}). \end{aligned}\right.$$

On voit qu'une partie seulement du travail intérieur et du travail relatif est employée à faire varier la force vive relative. Le surplus contribue à modifier la rotation d'entraînement et les moments d'inertie.

L'équation (7) peut d'ailleurs être interprétée exclusivement au point de vue du mouvement relatif. Il faut alors tenir compte des forces apparentes, dont le travail se réduit à celui des forces d'inertie d'entraînement. L'ensemble de termes

$$(8)\qquad -(f dp + g dq + h dr) + \tfrac{1}{2}(p^2 d\mathrm{A} + q^2 d\mathrm{B} + r^2 d\mathrm{C})$$

représente donc nécessairement le travail de ces forces. C'est ce qu'il est aisé de vérifier. En effet, l'accélération d'entraînement a pour composantes

$$\begin{aligned} j'_x &= q'z - r'y - (q^2 + r^2)x + pqy + prz, \\ j_y &= r'x - p'z - (r^2 + p^2)y + qpx + rqy, \\ j_z &= p'y - q'x - (p^2 + q^2)z + pqx + rqy. \end{aligned}$$

Le travail des forces d'inertie d'entraînement est

$$-\Sigma m (j_x\, dx + j_y\, dy + j_z\, dz)$$

ou bien

$$\begin{aligned} - f dp - g dq - h dr + p^2\, \Sigma m (y dy + z dz) + \ldots \\ - pq\, \Sigma m (x\, dy + y dx) - \ldots, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} &\Sigma m (y\, dy + z\, dz) = \tfrac{1}{2} d\mathrm{A}, \quad \ldots, \quad \ldots, \\ &\Sigma m (x\, dy + y\, dx) = 0, \quad \ldots, \quad \ldots. \end{aligned}$$

et l'on retrouve ainsi l'expression (8).

6. Concevons qu'à l'intérieur du corps certains points exécutent des mouvements relatifs assignés à l'avance : c'est ce que pourrait faire, par exemple, un être animé entraîné dans le système, et prenant des points d'appui convenables sur des parties rigides. De pareils mouvements ont nécessairement leur répercussion sur le travail total. J'ai déjà étudié une question semblable dans

le cas particulier de l'escarpolette, qui est un système pesant, déformable, possédant un axe fixe (*Bull. de l'A. F. A. S.*, 1894). La formule (7) montre quel est l'effet de ces mouvements dans le cas général d'un système possédant un seul point fixe et soumis à des forces quelconques. Le moteur entraîné dispose arbitrairement des termes $\Sigma m x'^2$, f, g, h, A, B, C. Si l'on connaît en même temps p, q, r, on peut calculer le travail fourni. On voit, par exemple, qu'une valeur donnée de dA a d'autant plus d'influence que son coefficient p^2 est plus grand à l'instant considéré; de même, l'influence de f est mesurée par son coefficient dp, etc. Mais on doit se demander dans quelles limites on est maître de développer par ce procédé de la force vive *utilisable;* ou, en d'autres termes, quelle quantité de force vive demeure acquise après la cessation des mouvements relatifs qui lui ont donné naissance. Voici, dans cet ordre d'idées, un résultat qui me paraît assez remarquable.

7. Soit un système dont aucune partie ne puisse s'écarter indéfiniment du point fixe et dont la masse ne puisse, à aucun moment, se concentrer tout entière au point fixe. Par suite, les moments d'inertie A, B, C demeurent constamment compris entre deux limites extrêmes, finies et non nulles, que j'appellerai D_1 et D_2. Supposons, en outre, que les forces extérieures, s'il y en a, dérivent d'un potentiel uniforme : il est clair alors que, au bout d'un temps quelconque, ces forces ne peuvent développer qu'un travail limité. Ceci étant, je dis que :

1° *Dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, la force vive utilisable est limitée;*

2° *Dans le cas où il y a des forces extérieures, si petites qu'on les suppose, la force vive utilisable peut croître au delà de toute limite.*

Pour établir la première proposition, ajoutons les équations (1) multipliées au préalable par $Ap + f$, $Bq + g$, $Cr + h$. L'intégration est immédiate et il vient

$$(9) \qquad (Ap + f)^2 + (Bq + g)^2 + (Cr + h)^2 = K^2,$$

K^2 désignant une constante. On aurait pu écrire cette équation *a priori*, car elle exprime simplement que le moment résultant des quantités de mouvement est constant. D'autre part, la force vive utilisable est, d'après ce que l'on a vu,

$$A\left(p+\frac{f}{A}\right)^2+B\left(q+\frac{g}{B}\right)^2+C\left(r+\frac{h}{C}\right)^2,$$

ou bien

$$\frac{(Ap+f)^2}{A}+\frac{(Bq+g)^2}{B}+\frac{(Cr+h)^2}{C}.$$

Elle est comprise entre $\frac{K^2}{D_1}$ et $\frac{K^2}{D_2}$.

Pour établir la seconde proposition, imaginons que le corps soit divisé en deux parties U_1 et U_2 assujetties aux conditions suivantes. La partie U_1 forme une sphère rigide homogène, ou composée de couches homogènes sphériques et concentriques; cette sphère a son centre à l'origine. La partie U_2 est immobile dans l'espace : à cet effet, chacun de ses points est sollicité par une force intérieure F, égale et opposée à la force extérieure. En vertu du principe d'égalité de l'action et de la réaction, la partie U_1 est sollicitée par des forces égales et opposées aux forces F; sous l'action de ces forces, elle tourne autour de son centre. Ce mouvement n'empêche pas la configuration de l'ensemble U_1, U_2 de demeurer invariable. Les axes d'inertie principaux de cet ensemble sont immobiles; p, q, r sont donc nuls et A, B, C sont constants, ainsi que les moments L, M, N des forces extérieures. Les équations (1) se réduisent à

$$\frac{df}{dt}=L,\qquad \frac{dg}{dt}=M,\qquad \frac{dh}{dt}=N.$$

D'après cela, f, g, h croissent proportionnellement au temps, et la force vive utilisable, qui est égale ici à

$$\frac{f^2}{A}+\frac{g^2}{B}+\frac{h^2}{C},$$

croît comme le carré du temps. C'est ce que nous voulions faire voir.

Observons, d'ailleurs, que, dans ces conditions particulières, les forces extérieures ne fournissent *aucun travail*. Cela est évident pour la partie U_2, qui demeure, par hypothèse, immobile, et, quant à la partie U_1, cela résulte du fait que des forces admettant un potentiel et appliquées à une sphère homogène ou composée de couches homogènes, concentriques, ont une résultante unique appliquée au centre. Malgré cette absence de travail, les forces extérieures sont *indispensables* pour permettre aux forces intérieures de développer le travail équivalent à l'accroissement de la force vive utilisable.

Un exemple bien simple est fourni par l'écureuil qui se meut dans sa cage cylindrique. S'il grimpe aux barreaux de façon à maintenir constamment son centre de gravité dans une position fixe et si l'on néglige les résistances passives, la cage prend un mouvement de rotation uniformément accéléré. A l'instant où l'animal cesse d'agir, l'ensemble conserve une vitesse d'autant plus grande que le travail a duré plus longtemps. Au contraire, si la pesanteur était supprimée, le système, parti du repos, devrait, d'après le théorème des aires, revenir immédiatement au repos dès que l'écureuil se tiendrait immobile. L'escarpolette donne lieu à une application du même genre.

8. On peut, d'une infinité de manières, modifier le corps sans altérer les moments d'inertie principaux A, B, C; c'est ce qui arrive, par exemple, quand une suite continue de points matériels, formant une courbe fermée et homogène, circule le long de cette courbe en respectant sa forme et ses dimensions. Dans ces conditions, il n'y a pas, à vrai dire, de déformation. Mais voici un cas où les choses se passent autrement. Supposons que le système comporte seulement deux points mobiles, de même masse, ayant pour coordonnées respectives x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2. Si l'on veut que leurs déplacements simultanés soient sans influence sur les moments d'inertie, on doit, en appelant a, b, c, a', b', c' six constantes arbitraires, s'imposer les conditions

$$x_1^2+x_2^2=a^2, \qquad y_1^2+y_2^2=b^2, \qquad z_1^2+z_2^2=c^2,$$
$$y_1z_1+y_2z_2=a', \qquad z_1x_1+z_2x_2=b', \qquad x_1y_1+x_2y_2=c'.$$

La solution générale est donnée par les formules

$$x_1=a\cos(u+\alpha), \qquad x_2=a\sin(u+\alpha),$$
$$y_1=b\cos(u+\beta), \qquad y_2=b\sin(u+\beta),$$
$$z_1=c\cos(u+\gamma), \qquad z_2=c\sin(u+\gamma),$$

dans lesquelles u est une variable auxiliaire et α, β, γ sont de nouvelles constantes telles que l'on ait

$$bc\cos(\beta-\gamma)=a', \qquad ca\cos(\gamma-\alpha)=b', \qquad ab\cos(\alpha-\beta)=c'.$$

Lorsque u varie, les deux points décrivent une même ellipse dont le centre est à l'origine, et ils se trouvent à chaque instant aux extrémités de deux diamètres conjugués. Si l'on pose $\frac{du}{dt}=\omega$, les moments de rotation de ce couple de points sont

$$\omega bc\sin(\beta-\gamma), \qquad \omega ca\sin(\gamma-\alpha), \qquad \omega ab\sin(\alpha-\beta).$$

Ils sont donc proportionnels à ω, qui est une fonction arbitraire du temps. Il est clair que, avec trois couples semblables, décrivant par exemple trois ellipses situées dans les trois plans de coordonnées, on peut s'arranger pour que les moments de rotation f, g, h soient trois fonctions du temps arbitrairement choisies.

Ceci posé, je dis que, s'il n'y a pas de forces extérieures, on peut trouver un système de mouvements relatifs capables de communiquer aux axes mobiles un mouvement d'entraînement assigné à l'avance. Appelons, en effet, φ, ψ, θ les angles d'Euler. Ce sont ici des fonctions données du temps.

Les formules connues

$$\begin{aligned}
p &= \psi'\sin\varphi\sin\theta+\theta'\cos\varphi,\\
q &= \psi'\cos\varphi\sin\theta-\theta'\sin\varphi,\\
r &= \psi'\cos\theta+\varphi'
\end{aligned}$$

fournissent immédiatement p, q, r. Si le mouvement relatif se réduit à celui de trois couples de points mobiles dans les conditions qui viennent d'être indiquées, A, B, C sont constants. D'autre part, le moment résultant des quantités de mouvement est un vecteur absolument fixe. Soient C_1, C_2, C_3 ses projections sur trois axes fixes quelconques, projections qui sont constantes. Les cosinus directeurs des axes mobiles sont des fonctions connues des angles d'Euler. On peut donc exprimer, en fonction de C_1, C_2, C_3 et du temps, les projections du moment résultant sur les axes mobiles. Mais ces projections sont égales à $Ap+f$, $Bq+g$, et $Cr+h$. Comme A, B, C sont constants et comme p, q, r sont connus, on obtient, sans aucune intégration, les moments f, g, h. Enfin, on en déduit, par quadrature, les trois quantités ω qui règlent les mouvements des trois couples de points sur leurs orbites elliptiques, et le problème se trouve complètement résolu.

9. Inversement, considérons un corps déformable qui n'est soumis qu'à des forces intérieures et, continuant à supposer que A, B, C sont invariables, donnons-nous, en fonction du temps, les trois moments f, g, h. Pour trouver le mouvement, il faut intégrer les équations (1), privées de second membre, en considérant comme inconnues les quantités p, q, r. On peut écrire immédiatement l'intégrale des aires

$$(Ap+f)^2+(Bq+g)^2+(Cr+h)^2=K^2,$$

ou

$$A^2(p+p_1)^2+B^2(q+q_1)^2+C^2(r+r_1)^2=K^2. \tag{10}$$

Si les moments f, g, h sont variables, on n'aperçoit pas d'autre intégrale. Mais, s'ils sont constants, ce qui a lieu quand les quantités ω du n° 8 sont elles-mêmes constantes, on a

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=0,$$

d'où

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=H^2. \tag{11}$$

Ceci nous montre en passant que :

Si les moments d'inertie sont constants, ainsi que les moments de rotation, et s'il n'y a pas de forces extérieures, la force vive d'entraînement est constante, comme pour un corps solide. En pareil cas, le travail des forces intérieures est entièrement employé à développer la force vive relative et la force vive composée.

Ce résultat concorde avec l'expression trouvée précédemment (7) pour le travail des forces intérieures.

Les deux intégrales précédentes, jointes à la première équation (1), qui devient ici

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr+qh-rg=0,$$

permettent de ramener la recherche de p, q, r à des quadratures. On obtient ensuite les angles d'Euler par le procédé ordinaire, en mettant simplement $A(p+p_1)$, $B(q+q_1)$, $C(r+r_1)$ à la place de Ap, Bq, Cr.

10. Il est naturel de chercher une représentation géométrique du mouvement basée, comme dans la théorie de Poinsot, sur la considération de l'ellipsoïde principal d'inertie. Je continue à supposer que les quantités A, B, C, p_1, q_1, r_1 sont constantes, et qu'il n'y a pas de forces extérieures. L'axe instantané de rotation perce l'ellipsoïde d'inertie en un point dont les coordonnées vérifient les équations

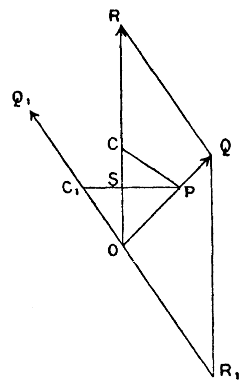
$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{1}{H}.$$

Le plan Π tangent en ce point a pour équation (X, Y, Z désignant les coordonnées courantes)

$$AXx+BYy+CZz=1.$$

Les coordonnées X, Y, Z du pied P (*fig.* 1) de la perpendicu-

Fig. 1.



laire abaissée de l'origine O sur le plan Π sont données par

$$\frac{X}{Ax}=\frac{Y}{By}=\frac{Z}{Cz}=Xx+Yy+Zz=X^2+Y^2+Z^2.$$

Si l'on remplace x, y, z par $\frac{p}{H}, \frac{q}{H}, \frac{r}{H}$, on a

$$(1)\qquad \frac{X}{X^2+Y^2+Z^2}=\frac{Ap}{H}, \qquad \ldots,$$

Ces formules prouvent que le point P dérive par inversion du point Q, dont les coordonnées sont Ap, Bq, Cr. Le produit $OP \times OQ$ est égal à H. OQ n'est autre chose que le vecteur résultant des moments des quantités de mouvement dues à l'entraînement (p, q, r). Soit, de même, OQ_1 le vecteur constant résultant des moments de rotation (Ap_1, Bq_1, Cr_1). Si l'on compose entre eux les deux vecteurs OQ, OQ_1, on doit obtenir un vecteur OR absolument fixe. Q est donc sur une sphère fixe de centre R, et, par suite, P se trouve sur une autre sphère fixe Σ ayant son centre C sur OR. D'autre part, OQ_1 est lié aux axes mobiles.

Si l'on mène la droite QR_1 parallèle à OR, elle rencontre la droite OQ_1 en un point R_1 tel que $OR_1 = RQ$, et l'on voit que Q se trouve sur une sphère de centre R_1, liée aux axes mobiles. Le point P se trouve donc, par rapport à ces axes, sur une sphère Σ_1 ayant son centre C_1 sur OQ_1. D'après les propriétés connues de l'inversion, les angles CPQ, RQP sont égaux et il en est de même des angles C_1PO, R_1QO. Dès lors, on reconnaît sans peine que les triangles PCO, PC_1O sont égaux et que la figure CPC_1O est un contreparallélogramme.

Ceci posé, le mouvement a lieu dans les conditions suivantes. Soit un contreparallélogramme CPC_1O dont les sommets C et O sont fixes et dont les côtés OC_1, C_1P, CP sont trois barres de longueur invariable. La barre C_1P est guidée de manière à rester toujours en contact avec la tige fixe OC. Un plan Π, attaché au sommet P, porte une tige perpendiculaire qui part de P et glisse dans un collier placé en O. L'ellipsoïde d'inertie, qui est fixé à la barre OC_1, reste constamment tangent au plan Π et tourne à chaque instant autour du diamètre aboutissant au point de contact. La rotation élémentaire déplace la tige OC_1, ce qui entraîne un mouvement correspondant du plan Π, et l'axe instantané se déplace progressivement, de manière à aboutir toujours au point de contact de l'ellipsoïde et du plan.

Le lieu du point P dans l'espace est une courbe sphérique transcendante. Par rapport aux axes mobiles, le lieu du même point s'obtient en éliminant p, q, r entre les équations (10), (11) et (12), ce qui, en remplaçant Ap_1, Bq_1, Cr_1 par f, g, h, donne les deux équations

$$H^2 + 2H(fX + gY + gZ) + (f^2 + g^2 + h^2 - K^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0,$$
$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = (X^2 + Y^2 + Z^2)^2.$$

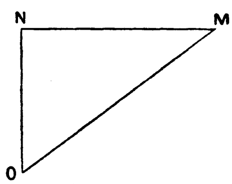
Ces équations représentent évidemment la transformée par inversion d'une section sphérique d'un ellipsoïde.

La polhodie (lieu du point M où l'axe instantané perce la surface de l'ellipsoïde d'inertie) est l'intersection des deux ellipsoïdes

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A^2(Hx + p_1)^2 + B^2(Hy + q_1)^2 + C^2(Hz + r_1)^2 = K^2.$$

Remarquons encore que, si l'on mène par le point de rencontre S des droites OC et PC_1 un plan Π' parallèle à Π, ce plan, perpendiculaire à OP, est tangent à l'ellipsoïde de révolution qui a pour foyers C_1 et O. Par suite, le plan Π est tangent à un ellipsoïde homothétique, de diamètre double, lié aux axes mobiles. La polhodie peut donc être regardée comme étant la courbe de contact de l'ellipsoïde d'inertie avec la développable circonscrite à cet ellipsoïde et à un ellipsoïde de révolution ayant son centre en C_1 et un foyer en O. De là une nouvelle manière de se figurer le mouvement. A un instant quelconque, l'axe instantané de rotation est une droite OM aboutissant à un point M de la polhodie,

Fig. 2.



et la vitesse de rotation est proportionnelle à OM. La génératrice MN de la développable touche l'ellipsoïde de révolution en un point N qui se trouve sur l'axe fixe des moments, et la droite ON coïncide avec cet axe. Le mouvement s'effectue donc de telle manière que chaque droite OM devienne, à tour de rôle, axe de rotation, et que la droite correspondante ON vienne en même temps coïncider avec l'axe des moments (*fig.* 2).

On s'assure sans peine que, par rapport aux axes mobiles, la droite ON, de même que la droite OM, décrit un cône du quatrième degré. Au bout d'un temps fini, la droite ON qui, primitivement, se trouvait appliquée sur l'axe fixe, revient en coïncidence avec lui. A partir de cet instant, il est clair que toutes les circonstances du mouvement doivent se reproduire dans le même ordre : le plan MON a seulement tourné d'un certain angle autour de l'axe fixe. Le mouvement qui nous occupe présente donc une périodicité analogue à celle du mouvement de Poinsot.

11. Quand l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, les calculs se simplifient. Si l'on a, par exemple, $B = C$, on peut orienter les axes Oy, Oz de façon à avoir, en outre, $q_1 = r_1$. Les équations (10) et (11) fournissent alors pour $q^2 + r^2$ et $q + r$ des polynomes du second degré en p. On en déduit que $q - r$ est la racine carrée d'un polynome du quatrième degré, et la première équation (1), qui se réduit à

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt} + \mathrm{B}q_1(q - r) = 0,$$

montre que l'on n'a plus à envisager qu'une intégrale elliptique.

Si, de plus, l'axe des moments de rotation a même direction que l'axe de révolution de l'ellipsoïde, on a $q_1 = r_1 = 0$. Il vient, par suite,

$$\frac{dp}{dt} = 0, \qquad \mathrm{B}\frac{dq}{dt} + \mathrm{A}p_1 r = 0, \qquad \mathrm{B}\frac{dr}{dt} - \mathrm{A}p_1 q = 0,$$

d'où, en appelant C, C′, C″ trois constantes arbitraires :

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{C}, \\ q &= \mathrm{C}' \cos\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}p_1 t + \mathrm{C}''\right), \\ r &= \mathrm{C}' \sin\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}p_1 t + \mathrm{C}''\right). \end{aligned}$$

Comme la direction : $\mathrm{A}(p + p_1)$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{B}r$ est fixe dans l'espace, le mouvement se réduit manifestement au roulement uniforme d'un cône droit sur un cône droit de même sommet. On arriverait à la même conséquence en remarquant que, d'après l'hypothèse faite actuellement, l'ellipsoïde d'inertie et l'ellipsoïde auxiliaire employé dans l'article précédent sont deux surfaces de révolution ayant même axe, et, par suite, le triangle OMN est de grandeur invariable.

Ce cas se réalise, en particulier, quelle que soit la direction de l'axe des moments de rotation, quand les trois moments d'inertie sont égaux entre eux.