BULLETIN DE LA S. M. F.

J. CLAIRIN

Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 100-105
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__100_1>

SUR UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. J. Clairin.

1. Supposons qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes,

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

admette deux transformations infinitésimales de contact (θ) et (θ_1), qui engendrent un groupe (g), et désignons par $\varphi_1(x, y, z, p, q)$, $\varphi_2(x, y, z, p, q)$, $\varphi_3(x, y, z, p, q)$ les trois invariants du premier ordre de (g) ; les équations

$$(2)\quad x' = \varphi_1(x, y, z, p, q), \qquad y' = \varphi_2(x, y, z, p, q) \qquad z' = \varphi_3(x, y, z, p, q)$$

font correspondre à chaque intégrale de (1) une surface (Σ') ; je me propose de démontrer que ces surfaces (Σ') sont les intégrales d'une équation du second ordre linéaire par rapport aux dérivées secondes.

On a déjà considéré le cas où (θ) et (θ_1) sont permutables (¹) ; je rappelle que l'on peut faire très simplement la démonstration en remarquant qu'il suffit d'effectuer une transformation de contact pour remplacer l'équation (1) par une équation qui admet les transformations infinitésimales dont les fonctions caractéristiques sont 1 et x, c'est-à-dire par une équation dont le premier membre ne contient ni z ni p,

$$(3)\qquad \Phi(x, y, q, r, s, t) = 0,$$

tandis que les invariants de (g) deviennent x, y, q. Il est aisé de voir que q satisfait à une équation de la forme annoncée. A une intégrale de cette dernière équation correspondent ∞^2 intégrales de (3). Pour les déterminer il faut intégrer une équation différentielle ordinaire du second ordre ; si l'on en connaît une, on en déduit toutes les autres en appliquant les transformations de (g). Il y a exception si l'équation (3) admet le groupe d'ordre infini

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z + X,$$

X désignant une fonction quelconque de x ; la transformation précédente remplace alors l'équation proposée par une équation du premier ordre.

Examinons maintenant le cas où (θ) et (θ_1) ne sont pas permutables et supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que (θ_1) laisse (θ) invariante ; une transformation de contact permet de donner à leurs fonctions caractéristiques les valeurs 1 et z : le

---

(¹) BÄCKLUND, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (*Mathematische Annalen*, t. XV, 1879, p. 39). — GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 242 et suiv.

premier membre de la transformée de l'équation (1),

$$(4) \qquad \Psi(x, y, p, q, r, s, t) = 0,$$

ne contient pas z et est homogène par rapport à p, q, r, s, t, les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 se réduisent à $x, y, \frac{p}{q}$. Nous allons montrer que, si l'on prend $\frac{p}{q}$ pour nouvelle fonction inconnue, cette fonction vérifie une équation du second ordre. On a

$$(5) \qquad z' = \frac{p}{q}, \qquad p' = \frac{qr - ps}{q^2}, \qquad q' = \frac{qs - pt}{q^2};$$

si l'on pose

$$p_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},$$

il vient encore

$$r' = \frac{(qp_{3,0} - pp_{2,1})q - 2s(qr - ps)}{q^3},$$

$$s' = \frac{(qp_{2,1} - pp_{1,2})q - (rt + s^2)q + 2pst}{q^3},$$

$$t' = \frac{(qp_{1,2} - pp_{0,3})q - 2t(qs - pt)}{q^3}.$$

En éliminant $p_{3,0}$, $p_{2,1}$, $p_{1,2}$, $p_{0,3}$ entre les équations de ce dernier système et les équations

$$\frac{d\Psi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Psi}{dy} = 0,$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Psi}{\partial r} & \frac{\partial\Psi}{\partial s} & \frac{\partial\Psi}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\Psi}{\partial x} + r\frac{\partial\Psi}{\partial p} + s\frac{\partial\Psi}{\partial q} \\ 0 & \frac{\partial\Psi}{\partial r} & \frac{\partial\Psi}{\partial s} & \frac{\partial\Psi}{\partial t} & \frac{\partial\Psi}{\partial y} + s\frac{\partial\Psi}{\partial p} + t\frac{\partial\Psi}{\partial q} \\ -q^2 & pq & 0 & 0 & r'q^3 + 2s(qr - ps) \\ 0 & -q^2 & pq & 0 & s'q^3 + (rt + s^2)q - 2pst \\ 0 & 0 & -q^2 & pq & t'q^3 + 2t(qs - pt) \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation qui vient d'être écrite et les équations (4) et (5) sont homogènes par rapport à p, q, r, s, t; il est possible d'éliminer ces quantités et il reste pour définir z' une équation du second ordre qui contient linéairement r', s', t'.

Si l'équation (4) est de la forme

$$\Psi_0\left(x, y, \frac{p}{q}, \frac{qr-ps}{q^2}, \frac{qs-pt}{q^2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire si elle admet le groupe d'ordre infini

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = Z,$$

Z étant une fonction arbitraire de z, $\frac{p}{q}$ satisfait à une équation du premier ordre. C'est du reste le seul cas où les éliminations que nous avons indiquées soient impossibles.

Écartons ce cas particulier et montrons qu'en général à une intégrale de l'équation transformée correspondent ∞^2 intégrales de l'équation primitive qu'on peut déterminer par l'intégration d'équations différentielles ordinaires. z', p', q' ayant été remplacées par leurs expressions en fonction de x, y, supposons que les équations (4) et (5) soient résolues par rapport à $\frac{p}{q}, \frac{r}{q}, \frac{s}{q}, \frac{t}{q}$; on a, en particulier,

$$\frac{p}{q} = \alpha(x,y), \qquad \frac{s}{q} = \beta(x,y), \qquad \frac{t}{q} = \gamma(x,y);$$

on obtient la valeur de q en intégrant

$$\frac{dq}{q} = \beta(x,y)dx + \gamma(x,y)dy;$$

q étant connue, on a p, et z est donnée par l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Étant donnée une intégrale de l'équation transformée, on obtient toutes les intégrales de l'équation proposée qui lui correspondent, dès que l'on en connaît une, en appliquant à cette intégrale les transformations du groupe (g).

2. **Dans ce qui suit nous supposerons simplement que les transformations (θ) et (θ_1) engendrent un groupe (g); pour abréger, nous désignerons par (e) l'équation de Monge-Ampère obtenue comme il vient d'être expliqué. Je vais montrer qu'à toute trans-**

formation infinitésimale (λ) du groupe de (1) distincte de (θ) et (θ_1) et qui laisse (g) invariant correspond une transformation ponctuelle infinitésimale qui ne change pas (e) [1]. Appelons x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 les coordonnées de l'élément transformé de (x, y, z, p, q) par une transformation (Λ) du groupe engendré par (λ); à une surface (Σ') définie par les équations (2) correspond la surface (Σ'') représentée par les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} x'' = \varphi_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \\ y'' = \varphi_2(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \\ z'' = \varphi_3(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1). \end{cases}$$

Naturellement les surfaces (Σ'') satisfont également à l'équation (e); d'autre part, si l'on remplace x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 par leurs expressions en fonction de x, y, z, p, q, on peut éliminer ces dernières quantités entre les équations (2) et (6), parce que (Λ) laisse (g) invariant et l'on trouve

$$x'' = \psi_1(x', y', z'), \qquad y'' = \psi_2(x', y', z'), \qquad z'' = \psi_3(x', y', z');$$

les surfaces (Σ'') et (Σ') se correspondent donc par une transformation ponctuelle. Lorsque le paramètre qui figure dans les équations qui définissent (Λ) varie, cette transformation ponctuelle engendre un groupe à un paramètre qui laisse (e) invariante.

S'il existe plusieurs groupes à deux paramètres qui ne changent pas l'équation (1), la théorie précédente permet de déduire de cette équation plusieurs équations de Monge-Ampère : je vais montrer que deux équations de Monge-Ampère obtenues en considérant deux groupes (g), (h) qui ont une transformation infinitésimale commune se correspondent par une transformation de Bäcklund de troisième espèce.

Supposons que la transformation infinitésimale commune ait pour fonction caractéristique 1; l'équation donnée ne dépend pas de z. Appelons x', y', z', p', q' les coordonnées d'un élément du

---

[1] J'ai démontré dans ma Thèse (1re Partie, n° 7) que certaines transformations (B_2) jouissent d'une propriété analogue, mais je dois rectifier la proposition énoncée ensuite. L'une des transformations infinitésimales du groupe (γ) (toutes les lettres ont la même signification ici que dans le paragraphe indiqué) est la transformation (θ) à laquelle ne correspond aucune transformation infinitésimale qui laisse (ε) invariante. Si (γ) est un groupe à h paramètres, l'équation (ε) admet un groupe à $h - 1$ paramètres.

premier ordre d'une intégrale de l'équation de Monge-Ampère qui correspond au groupe (g) et soient x'', y'', z'', p'', q'' les quantités analogues relatives à une intégrale de l'équation qui correspond à (h), $x', y', z', p', q', x'', y'', z'', p'', q''$ s'expriment en fonction de x, y, p, q, r, s, t. En éliminant x, y, p, q, r, s, t entre les équations ainsi obtenues et l'équation proposée, il vient quatre relations entre les coordonnées de deux éléments correspondants (x', y', z', p', q'), $(x'', y'', z'', p'', q'')$; il est d'ailleurs évident qu'à une intégrale de l'une des deux équations de Monge-Ampère correspondent ∞^1 intégrales de l'autre.

3. J'indiquerai encore brièvement quelques propriétés très simples de la transformation définie par les équations (2).

Étant donnée une intégrale quelconque de (1), ces équations lui font correspondre une intégrale de (e), et nous avons vu comment de toute intégrale de (e) on pouvait déduire ∞^2 intégrales de (1) par l'intégration d'équations différentielles ordinaires; par conséquent, si l'une des deux équations est intégrable par la méthode de M. Darboux, la seconde l'est également.

A une caractéristique d'ordre n de (1) correspond une caractéristique d'ordre $n-1$ de (e), tandis qu'à une caractéristique d'ordre n de (e) correspondent ∞^2 caractéristiques d'ordre $n+1$ de (1).

Si l'on sait résoudre le problème de Cauchy pour l'une des deux équations, on sait résoudre ce problème pour l'équation transformée.

Lorsque l'équation proposée possède un système de caractéristiques du premier ordre, la transformation (2) équivaut au produit de deux transformations de Bäcklund. Étant donnée, par exemple, une équation linéaire

$$s + ap + bq = 0,$$

on trouve la même équation en prenant $\frac{p}{q}$ pour nouvelle inconnue, comme nous avons expliqué, et en effectuant successivement une transformation de M. Lucien Lévy et une transformation de Moutard [1].

[1] *Voir* les *Leçons* de M. GOURSAT, t. II, p. 258.