

# BULLETIN DE LA S. M. F.

N. DELAUNAY

## **Sur le calcul graphique des fonctions elliptiques et de quelques fonctions ultra-elliptiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 30 (1902), p. 113-121

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1902\\_\\_30\\_\\_113\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__113_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

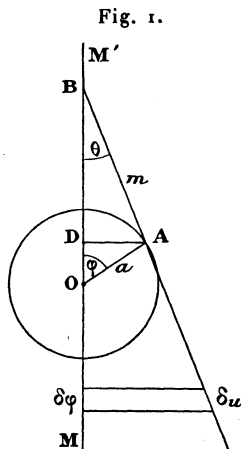
## MÉMOIRES.

### SUR LE CALCUL GRAPHIQUE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE QUELQUES FONCTIONS ULTRA-ELLIPTIQUES;

Par M. N. DELAUNAY.

Dans la présente Note je propose des constructions graphiques, fort simples, pour le calcul des fonctions elliptiques et de certaines fonctions ultra-elliptiques avec une approximation telle qu'on peut l'exiger d'un procédé graphique et qui, néanmoins, est suffisante pour la plupart des problèmes techniques résolubles par ces fonctions.

1. Soit AB (*fig. 1*) une bielle dont le point A glisse sur un



cercle décrit avec un rayon (manivelle) OA, tandis qu'un autre point B de la bielle glisse sur la droite OB menée par le centre O. Posons

$$AB = m; \quad OA = a; \quad \frac{a}{m} = k; \quad AOB = \varphi; \quad ABO = \theta.$$

xxx.

On aperçoit facilement qu'entre les angles  $\varphi$  et  $\theta$  existe une relation

$$\sin \theta = k \sin \varphi.$$

Lorsqu'on conçoit  $\varphi$  comme l'amplitude d'un argument  $u$ , on a

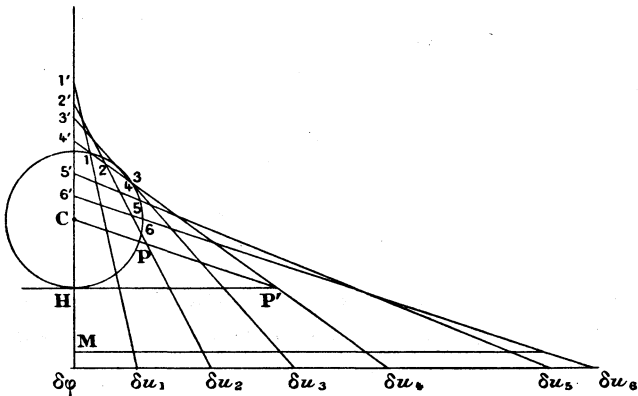
$$\cos \theta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta \varphi = \operatorname{dn} u,$$

$$(1) \quad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \theta},$$

$$(2) \quad du = \frac{d\varphi}{\cos \theta}.$$

Cette relation (2) nous montre que si l'on prend sur la droite  $MM'$  l'accroissement  $\delta\varphi$  de l'amplitude  $\varphi$  et que si on la projette sur la bielle à l'aide des perpendiculaires à la droite  $MM'$ , on obtient l'accroissement  $\delta u$  de l'argument  $u$ . L'accroissement  $\delta\varphi$  est la projection orthogonale de l'accroissement  $\delta u$ . En répétant cette construction pour plusieurs valeurs consécutives de  $\varphi$  entre les limites 0 et  $\varphi$  (c'est-à-dire pour les positions de la bielle correspondant à ces valeurs consécutives de  $\varphi$ ), on obtient des valeurs consécutives  $\delta u_1, \delta u_2, \dots$ . En construisant la somme  $\sum \delta u$ , on obtient l'intégrale elliptique  $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$ . Nous nous occuperons

Fig. 2.



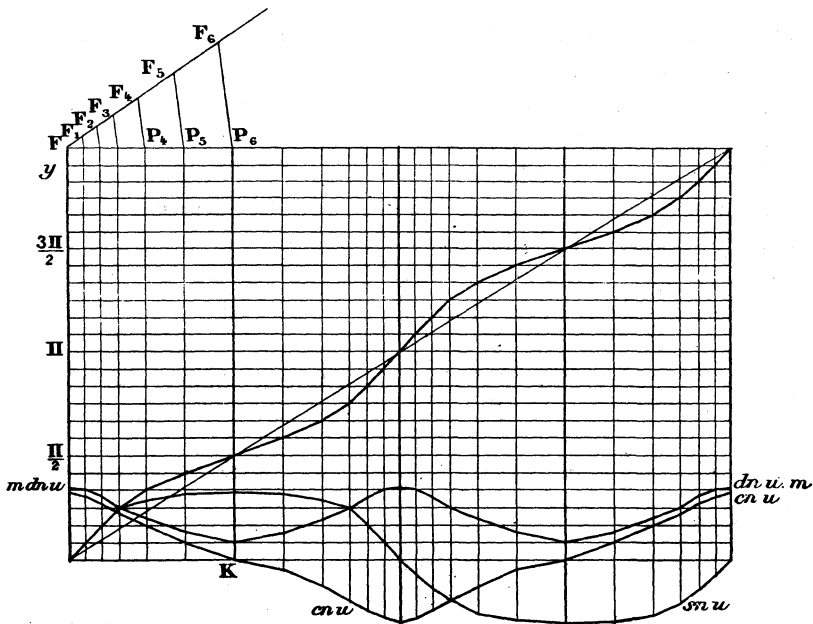
plus bas (au n° 2) du degré d'approximation présenté par cette

méthode et nous donnerons un moyen de corriger cette construction.

Il vaut mieux modifier la construction comme il est indiqué sur les figures 2 et 3. Après avoir tracé un cercle avec un rayon  $a = 1$ , on divise le quart de ce cercle en  $n$  parties égales et l'on décrit des cercles des points de division 1, 2, 3, ... avec des rayons égaux à  $m$ . Ces cercles coupent la droite  $MM'$  aux points  $1', 2', 3', \dots$ . On trace les bielles  $1'1, 2'2, 3'3, \dots$  et l'on prend, quelque part sur la droite  $MM'$ , la longueur de la corde  $2 \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)$  qui représente approximativement l'accroissement  $\delta\varphi$ , qu'on projette sur les bielles  $1'1, 2'2, \dots$  à l'aide des perpendiculaires à la droite  $MM'$ .

Après avoir obtenu ainsi les accroissements  $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$  sur les bielles, on trace les axes des coordonnées  $(u, y)$  (fig. 3) et

Fig. 3.



l'on porte les accroissements égaux  $\delta\varphi$  sur l'axe des  $y$  et les accroissements  $\delta u_1, \delta u_2, \dots$  sur l'axe des  $u$  successivement à partir de l'origine. Ces accroissements  $\delta u_1, \delta u_2, \dots$  vont en croissant jus-

qu'à  $u = K$  qui correspond à  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . A partir de cette valeur de  $u$  on prend les  $\delta u$  en ordre inverse, et ainsi de suite. On obtient ainsi des points de division sur chaque axe, et, en traçant par ces points des parallèles aux axes, on obtient un réseau.

La ligne brisée formée par les diagonales successives des quadrilatères élémentaires du réseau, en partant de l'origine, représente l'intégrale  $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ , puisque les abscisses de cette ligne brisée sont les valeurs de l'argument  $u$ , tandis que les ordonnées sont les amplitudes  $\varphi$  approximativement.

En posant  $a = 1$ , on a sur la figure 1

$$\begin{aligned} AD &= \sin \varphi = \sin am u = sn u, \\ OD &= \cos \varphi = \cos am u = cn u, \\ BD &= m \Delta \varphi = m \Delta am u = m dn u. \end{aligned}$$

On trouve aisément ces valeurs sur la figure 2. En menant par les points de division de l'axe  $u$  les ordonnées égales aux valeurs correspondantes de  $sn u$ ,  $cn u$ ,  $m dn u$ , on obtient les courbes  $y = sn u$ ,  $y = cn u$ ,  $y = m dn u$ .

L'aspect de la courbe  $y = cn u$  donne lieu à une remarque intéressante : on aperçoit sur la *cosinusoïde* elliptique  $y = cn u$  plus de points d'inflexion que n'en présente la sinusoïde ordinaire. L'analyse confirme ce fait. En effet, en égalant à zéro la dérivée seconde de  $cn u$ , on a

$$(3) \quad \frac{d^2(cn u)}{du^2} = \frac{d(-dn u sn u)}{du} = cn u(k^2 sn^2 u - dn^2 u) = 0.$$

Or on a  $k = \frac{1}{m}$ , parce qu'on a posé  $a = 1$ ; donc les solutions de l'équation (3) sont

$$cn u = 0; \quad sn u = \pm m dn u.$$

La première de ces solutions définit des points d'inflexion sur l'axe des  $u$ ; les deux autres solutions définissent encore des points d'inflexion correspondant aux abscisses des points d'intersection de la courbe  $y = m dn u$  avec les courbes  $y = sn u$  et  $y = -sn u$ .

2. Passons maintenant à l'étude de l'approximation présentée par notre méthode graphique. On peut recourir pour cette étude à la formule célèbre d'Euler

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^b f(\varphi) d\varphi &= h \left[ \frac{f(a)}{2} + f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \dots + \frac{f(b)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{h^2 \varepsilon}{12} [f'(b) - f'(a)], \quad 1 > \varepsilon > 0, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle  $h$  est l'accroissement de la variable, et  $\varphi_p = \varphi_{p-1} + h$ , où  $p$  est un nombre entier.

Dans notre construction de l'intégrale  $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ , on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}; & f'(\varphi) &= \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}; \\ h &= \frac{\pi}{2n}; & a &= 0; & b &= \frac{p\pi}{2n} \end{aligned} \right.$$

et la formule (4) d'Euler devient

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{2n}\right)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n}\right)}} \right] \\ &\quad - \frac{\pi}{4n} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n}\right)}} - 1 \right] - \frac{\pi^2 \varepsilon k^2 \sin \left(\frac{p\pi}{2n}\right) \cos \left(\frac{p\pi}{2n}\right)}{4n^2 \cdot 12 \left[ 1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n}\right) \right]^2}. \end{aligned} \right.$$

Notre construction graphique nous donne la somme

$$(7) \quad \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n}\right)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n}\right)}} \right].$$

La formule (6) nous enseigne qu'il y faut encore ajouter deux termes ( $-\xi_1$ ) et ( $-\xi_2$ ) tels que

$$(8) \quad \xi_1 = \frac{\pi}{4n} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2n}\right)}} - 1 \right]$$

et

$$(9) \quad \xi_2 = \frac{\pi^2 \varepsilon k^2 \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}{4 n^2 \iota_2 \left[1 - k^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Commençons par le calcul du terme  $\xi_2$ . La valeur maximale de  $\xi_2$  ne peut pas surpasser la valeur maximale de la fonction

$$(10) \quad \frac{\pi^2 \varepsilon k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{4 n^2 \iota_2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

parce que  $\frac{p\pi}{2n}$  est une valeur particulière de  $\varphi$ . On voit que la dérivée première de (10) se réduit à zéro lorsqu'on a

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}}{k\sqrt{3}},$$

$$\sin^2 \varphi = 1 - \frac{1}{k^2} \pm \frac{\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^2},$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{k^2} \mp \frac{\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^2},$$

$$(11) \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{2 - k^2 \mp \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}.$$

On voit aussi que la valeur maximale de (10) est

$$(12) \quad \frac{\pi^2 \varepsilon}{4 n^2 \iota_2} \frac{\sqrt{2 \sqrt{k^4 - k^2 + 1} + k^2 - 2}}{\sqrt{3} [2 - k^2 - k^2 \sqrt{k^4 - k^2 + 1}]} > \max \xi_2.$$

Il faut prendre ici le signe (+) devant le radical  $\sqrt{k^4 - k^2 + 1}$  du numérateur, parce qu'autrement la valeur (12) serait imaginaire. Il faut, au contraire, prendre ce radical avec le signe (—) au dénominateur, parce qu'autrement l'équation (11) donnerait à  $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$  une valeur plus grande que l'unité, ce qui est impossible.

La quantité (12) croît avec  $k$  et devient très grande pour les valeurs de  $k$  voisines de 1. Il faut donc abaisser préalablement le module  $k$  à l'aide de la transformation de Landen si  $k$  est voisin de 1. Mais la quantité (12) décroît très rapidement avec  $k$ ; ainsi,

pour  $k = 0,96$  et  $n = 12$ , la valeur maximale de  $\xi_2$  ne surpasse pas  $0,003839$ . On peut donc négliger le terme  $\xi_2$  pour  $k < 0,9$  si l'on convient d'envisager comme négligeables les erreurs qui ne surpassent pas  $\frac{1}{250}$ .

Le terme  $\xi_1$  devient maximum pour  $p = n$ . Mais ce maximum même ne surpasse pas  $0,0032$  pour  $k = 0,3$ ,  $n = 12$  et devient encore plus petit pour  $k < 0,3$ . Le terme  $\xi_1$  est donc aussi négligeable pour  $k < 0,3$ .

Mais pour  $k > 0,3$ , le terme  $\xi_1$  peut prendre des valeurs qu'on ne pourrait négliger. Dans ce cas, on peut facilement corriger la construction donnée au n° 1. En effet, la formule (8) peut être présentée sous la forme

$$(13) \quad \xi_1 = \frac{\pi}{4n} [\sec \theta - 1],$$

où  $\theta$  est l'angle ABO (*fig. 1*) correspondant à  $\varphi = \frac{p\pi}{2n}$ . Il suffit donc de diminuer les  $\delta u_1, \delta u_2, \dots$  obtenus par notre construction, par la soustraction des longueurs  $\frac{\pi}{4n} [\sec \theta - 1]$  qu'on construit aisément. Ainsi, par exemple, pour corriger  $\delta u_6$  on mène par le centre C une parallèle à la bielle correspondante jusqu'à la rencontre avec la tangente au cercle menée par le point H (*fig. 2*); on porte la longueur  $pp' = \sec \theta - 1$  sur le côté d'un angle égal à  $\frac{\pi}{4n}$ , construit séparément, à partir du sommet, et l'on trace, en prenant  $\sec \theta - 1$  pour rayon, un arc rencontrant les côtés de l'angle en  $t, t'$ . On aura  $\text{arc } tt' = \frac{\pi}{4n} (\sec \theta - 1)$ . Il ne reste qu'à soustraire  $tt'$  de la somme  $\delta u_1 + \delta u_2 + \dots + \delta u_6 = FP_6$  pour avoir  $u_6 = FP_6$  qu'on porte sur une parallèle à l'axe des  $u$ . On obtient ainsi les points  $P_6, P_5, P_4, \dots$  pour la construction du réseau.

On voit sur la figure 3, qui est construite pour  $n = 6, k = 0,96$ , que les droites  $F_6 P_6, F_5 P_5, \dots$  sont parallèles; cela peut faciliter la construction.

En résumé, on a la règle suivante pour le calcul graphique de  $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$  si l'on se contente de la division du quart de cercle C en



12 parties égales : 1° pour  $k < 0,3$ , on exécute la construction telle qu'elle est donnée au n° 1; 2° pour  $0,9 > k > 0,3$ , on la corrige par la soustraction des longueurs  $\frac{\pi}{4n} (\sec \theta - 1)$ ; 3° ce n'est que pour  $k > 0,9$  qu'il peut devenir nécessaire de recourir à la transformation de Landen.

Pour corriger l'erreur commise en prenant, sur la droite MM' et sur l'axe des  $y$ , la corde  $2 \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)$  au lieu de  $\frac{\pi}{2n}$ , il faut prendre la longueur  $\pi$  par un des procédés bien connus (par exemple par la méthode de Kochansky qui donne  $\pi$  avec approximation de un dix-millième) et la diviser en 24 parties égales.

3. Pour la construction de l'intégrale elliptique de seconde espèce  $\int_0^\varphi \Delta\varphi d\varphi$ , il faut porter les longueurs  $\frac{\pi}{2n}$  sur les bielles et prendre la somme de leurs projections sur la droite MM'.

Notre procédé graphique est basé sur la simplicité de la construction de la fonction  $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$  et de la division de  $d\varphi$  par cette fonction. Cela permet aussi de construire l'intégrale ultra-elliptique de la forme

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(m_1 - x)(m_2 - x)(m_3 - x) \dots (m_j - x)}} = U,$$

dans laquelle toutes les racines  $m_1, m_2, \dots, m_j$  sont réelles. En effet, posons  $x = \sin^2 \varphi$ ; il s'ensuit  $dx = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$ . Posons

$$k_1^2 = \frac{1}{m_1}, \quad k_2^2 = \frac{1}{m_2}, \quad \dots, \quad k_j^2 = \frac{1}{m_j}.$$

Alors l'intégrale U prend la forme

$$U = 2k_1 k_2 \dots k_j \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \varphi} \dots \sqrt{1 - k_j^2 \sin^2 \varphi}}.$$

La quantité  $-\frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}$  n'est autre chose que la différentielle de la fonction  $\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi} = \cos \theta_1$ . Ainsi la différentielle  $\frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}$  peut être facilement construite; c'est le premier fac-

teur qui figure sous le signe de l'intégrale proposée. Il faut le diviser successivement par les radicaux  $\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \varphi}$ , ...,  $\sqrt{1 - k_j^2 \sin^2 \varphi}$  pour obtenir la différentielle à intégrer. Cette division peut se faire par une construction analogue à celle donnée au n° 1. Il faut seulement avoir soin de prendre pour chaque  $k$  des bielles de différentes longueurs, telles que  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_j$ .

Je crois que cette méthode graphique pourrait être utile aux ingénieurs, parce qu'elle est tout à fait élémentaire et donne, cependant, plusieurs valeurs consécutives des fonctions elliptiques à l'aide de constructions rapides.

---